

# 目 录

译校者序

前言

第一章 波的数学表示 .....	1
1.1 球面波 .....	1
1.2 柱面波 .....	2
1.3 平面波 .....	3
1.4 两个波的干涉 .....	5
1.5 空间频率 .....	6
1.6 光学工程和傅里叶变换的关系 .....	6
1.7 在光学工程中应用的特殊函数及其傅里叶变换 .....	8
1.8 用柱面坐标时的傅里叶变换 .....	12
习题 .....	16
文献 .....	17
第二章 衍射的基本理论 .....	18
2.1 基尔霍夫积分定理 .....	18
2.2 菲涅耳—基尔霍夫公式 .....	20
2.3 菲涅耳—基尔霍夫式的近似式 .....	22
2.4 夫琅和费区域的近似式 .....	24
2.5 菲涅耳区域的计算 .....	24
2.6 一维衍射 .....	26
2.7 菲涅耳积分 .....	28
习题 .....	30
文献 .....	31
第三章 各种衍射象的计算实例 .....	32
3.1 采用直角坐标时, 光瞳衍射象的计算实例 .....	32
3.2 边缘的衍射象 .....	34
3.3 周期性狭缝的衍射象 .....	37
3.4 圆孔的衍射象 .....	39
3.5 一维菲涅耳带板 .....	40
3.6 二维菲涅耳带板 .....	42
习题 .....	43
文献 .....	44

第四章 几何光学 .....	45
4.1 不均匀介质中波动方程式的几何光学近似式 .....	45
4.2 光的行进方向 .....	47
4.3 折射率变化与光路弯曲的关系 .....	49
4.4 光线在球对称的不均匀介质中的传播 .....	51
4.5 光纤 .....	54
习题 .....	59
文献 .....	60
第五章 透镜 .....	61
5.1 凸透镜的设计 .....	61
5.2 用波动光学研究透镜 .....	62
5.3 透镜形成的傅里叶变换 .....	63
5.4 从波动光学的角度研究透镜的成像作用 .....	66
5.5 透镜大小和象质 .....	68
习题 .....	72
文献 .....	73
第六章 高速傅里叶变换 (FFT) .....	74
6.1 何为 FFT (Fast Fourier Transform)? .....	74
6.2 FFT (频率筛选方法) 的原理 .....	76
6.3 FFT (时间筛选法) 的原理 .....	81
6.4 $W^k$ 的运算 .....	85
习题 .....	85
文献 .....	86
第七章 全息学 .....	87
7.1 全息术成图的原理 .....	87
7.2 全息图的数学原理 .....	88
7.3 再现光的人射角与象亮度的关系 .....	91
7.4 全息图按波面的分类 .....	92
7.5 计算全息图 .....	94
7.6 全息术的应用 .....	98
习题 .....	104
文献 .....	105

第八章 光学系统的空间频率特性 .....	107	9.7 对数滤波 .....	135
8.1 相干光情况下的传递函数 .....	107	习题 .....	137
8.2 相干光与非相干光情况下传递函数的不同点 .....	109	文献 .....	137
8.3 非相干光的传递函数 .....	111	第十章 微波全息学 .....	138
8.4 调制传递函数 (MTF) .....	114	10.1 记录微波电场分布的手段 .....	138
8.5 调制传递函数 (MTF) 与光学传递函数 (OTF) 的关系 .....	115	10.2 微波全息术的应用 .....	141
习题 .....	116	10.3 侧视合成孔径雷达 .....	145
文献 .....	117	10.4 HISS 雷达 (全息测冰系统) .....	149
第九章 光学信息处理 .....	118	文献 .....	151
9.1 摄影底板的感光特性 .....	118	第十一章 全息术的实验例 .....	152
9.2 基本运算的光学方法 .....	119	11.1 全息术用的光学实验台 .....	152
9.3 用空间频率区域滤波器的处理 (相干光) .....	122	11.2 全息术所必要的设备 .....	153
9.4 卷积滤波器 .....	129	11.3 制作全息图的步骤 .....	154
9.5 非相干光的处理 .....	132	11.4 曝光 .....	157
9.6 非相干光的匹配滤波器 .....	135	11.5 暗室处理 .....	158
		文献 .....	160
		附录 维纳滤波器的传递函数 .....	161
		习题解答 .....	164

# 第一章 波的数学表示

波的最基本形式是球面波、柱面波、平面波。任何复杂的波，都能表现为这些波的合成。因此，正确理解这种波的性质是十分重要的。

严密的表示形式及其证明将在以后的章节中叙述，本章仅从现象上讨论与这些波面有关的问题。

## 1.1 球面波

从点光源发出的光，其波面表现为球面波。各种形状的光源可以看成是许多点光源的集合体。所以，点光源是一个重要的基本的光源。

在原点上有一点光源  $S$ ，它随时间按  $e^{-i\omega t}$  变化，从点光源发出的光是这样传播的，设光速为  $v$ ，从原点发出的波面到达半径为  $r$  的球面时，其所需的时间是  $r/v$ ，所以球面上的光能可用下式表示

$$E(t, r) = E(r) e^{-i\omega(t-r/v)} = E(r) e^{-i(\omega t - kr)} \quad (1.1)$$

式中

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

下面，计算 (1.1) 式中的  $E(r)$  值，从原点发出的光应该是向着各个方向均匀地扩散的。所以，对围绕原点的一切球面波来说，单位时间内通过这个球面的全部能量  $W_0$  是一定的。为了计算通过的全部能量，必须知道通过微小面积上的能量密度。用以表示电磁波能量密度的有  $\epsilon |E|^2$ ，但是，这表示式仅仅当电力线在平面内时才是正确的。其中  $\epsilon$  是介电常数。因此，图 1.1 中，电力线被看作在很远的平面内，因而有

$$4\pi r^2 \epsilon |E(r)|^2 v = W_0 \quad (1.2)$$

$$\therefore E(r) = \frac{K}{r} E_0 \quad (1.3)$$

式中， $E_0$  是与光源的振幅有关的常数， $K$  是与介质有关的常数。把式 (1.3) 代入式 (1.1)，就求得表示点光源的公式

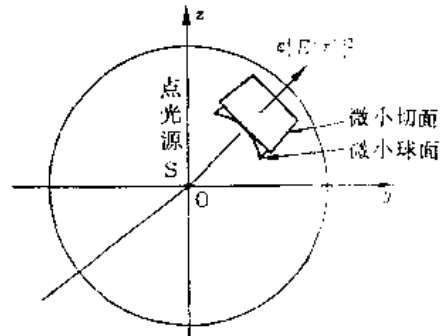


图1.1 从点光源出射的光的能量

$$E(t, r) = K \frac{E_0}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \quad (1.4)$$

在光学工程中，由于大多是在屏幕和底片等平面内观察的。所以，下面计算一下点光源照射在平面上时的光能分布。

如图 1.2 所示，设点光源  $S$  的座标为  $(x_0, y_0, 0)$ ，屏幕上的观察点  $P$  的座标为  $(x_1, y_1, z_1)$ 。从  $S$  到  $P$  的距离  $r$  为

$$r = \sqrt{z_i^2 + (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

$$= z_i \sqrt{1 + \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{z_i^2}}$$

当屏幕位于很远时，通过二项式展开，能取近似值：

$$r \approx z_i + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{z_i}$$

$$+ \dots \quad (1.5)$$

设该式中的屏幕位置满足下式的近似值：

$$\frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{z_i} \ll 1$$

把式 (1.5) 代入式 (1.4)，可得

$$E(t, x_i, y_i, z_i) = K \frac{E_0}{z_i}$$

$$\times e^{jk \left[ z_i + \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{2z_i} \right] - j\omega t} \quad (1.6)$$

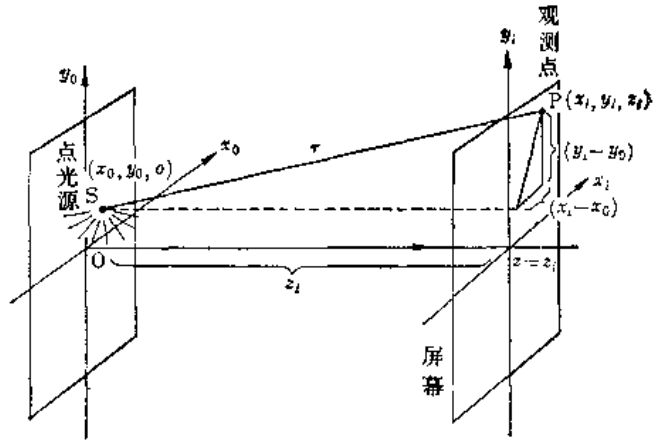


图1.2 点光源 S 与观测点 P 之间的距离

式 (1.6) 表示在屏幕面上观察点光源 S 时的光能分布，其中式 (1.6) 的分母值近似于  $r \approx z_i$ 。

## 1.2 柱面波

如图 1.3 所示，沿  $y$  轴有一个振幅相同的而无限长的线光源。从此光源发出的光，以  $y$  轴为中心，成柱面地扩展开，图 1.3 的柱面是表示一个波面，在单位时间内，通过这柱面的全部能量，等于从光源发出的全部能量。设单位时间单位长度发出的光能为  $w_0$ ，则从长度  $l$  发出的全部光能为

$$2\pi r l \varepsilon |E|^2 v = w_0 l \quad (1.7)$$

所以

$$E(r) = \frac{K}{\sqrt{r}} E_0 \quad (1.8)$$

其中， $E_0$  是与光源的振幅有关的系数， $K$  为与传播介质有关的系数。

与上节球面波的情况相同， $\varepsilon |E|^2$  的值，仅仅当电力线在平面上时是正确的。所以，必须注意，只有能把微小曲面看作微小切平面那样远的位置时，式 (1.7) 才是成立的。

这样，表示线光源的公式就成为

$$E(t, r) = K \frac{E_0}{\sqrt{r}} e^{-j(\omega t - kr)} \quad (1.9)$$

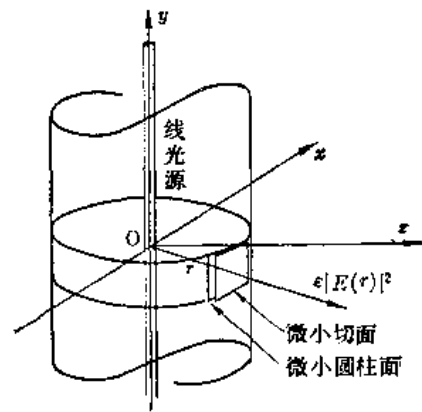


图1.3 从线光源出射的光的能量

此外, 在  $x = x_0$  处用平行于  $y$  轴的线光源去照射放在  $z = z_i$  处的屏幕时, 其光能分布和球面波的情况相同而成为

$$E(t, r) = K \frac{E_0}{\sqrt{z_i}} e^{i[k(z_i + (x_i - x_0)^2 / 2z_i) - \omega t]} \quad (1.10)$$

显然它在  $y_i$  轴方向上是没有变化的。

### 1.3 平面波

把平面波表示成数学式, 设平面波是图 1.4 所示的形式, 即向着与  $x$  轴成  $\theta$  角的方向前进, 用单位矢量  $\hat{k}$  表示其方向。

考虑二维的情况, 设观察点  $P$  的座标为  $(x, y)$ , 作一条连接观察点  $P$  和原点  $O$  的直线, 若把此直线看作一个矢量, 则  $P$  点可以用下面的矢量表示。

$$\mathbf{r} = ix + jy \quad (1.11)$$

式中  $i, j$  分别是  $x$  轴方向和  $y$  轴方向的单位矢量,  $\mathbf{r}$  称为  $P$  点的位置矢量。

图 1.4 中  $P$  点的位相等于从  $P$  点向  $\hat{k}$  的延长线所作垂线的交点  $P_0$  的位相, 设原点的位相为  $\phi_0$ , 则  $P_0$  点的位相为

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{OP_0} + \phi_0 \quad (1.12)$$

其中  $\lambda$  是波长,  $\overline{OP_0}$  是  $O$  到  $P_0$  的距离, 由于  $\overline{OP_0}$  是  $\mathbf{r}$  向  $\hat{k}$  方向的投影, 所以可以用  $\mathbf{r}$  和  $\hat{k}$  的数量积表示, 因此,

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} + \phi_0 \quad (1.13)$$

若采用新的量

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \quad (1.14)$$

则式 (1.13) 定义为

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0 \quad (1.15)$$

把  $\mathbf{k}$  称为波动矢量 (wave vector), 若分解成分量, 则成为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &= ik_x + jk_y = i \frac{2\pi}{\lambda_x} + j \frac{2\pi}{\lambda_y} \\ |\mathbf{k}| &= \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

式中  $\lambda_x, \lambda_y$  分别是  $x$  轴和  $y$  轴方向的周期 (波长)。

最后, 表示平面波的一般形式由三个位置分量和时间分量相加而成:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y, z) \exp j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0) \quad (1.17)$$

$\mathbf{E}_0(x, y, z)$  是矢量, 而  $|\mathbf{E}_0(x, y, z)|$  的值表示平面波振幅的大小,  $\mathbf{E}_0(x, y, z)$  矢量的

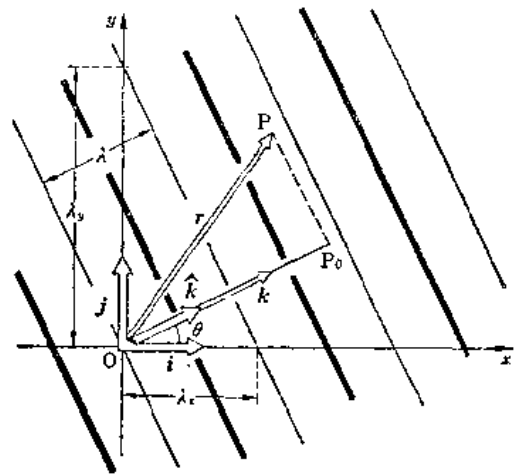


图1.4 向  $\hat{k}$  方向前进的前进波

方向，是表示平面波的偏振方向。若把偏振方向考虑在内则一般分析是非常复杂的。所以在光学工程中，往往只近似地考虑式 (1.17) 的一个分量，把  $E(x, y, z)$  作为标量  $E(x, y, z)$  来计算，这波形就称为标量波，以区别于式 (1.17) 的矢量波。

波的行进方向角显然是由  $\hat{k}$  决定的，但是，即使同一方向角还有正负之分。所以，下面再讲一下方向的决定方法。

为了简单化，只讨论在  $y$  轴方向偏振，沿  $x$  轴方向前进的波，即

$$E = \operatorname{Re} E_y e^{i(kx - \omega t)} = E_y \cos(kx - \omega t) \quad (1.18)$$

若把时刻  $t = 0$  代入式 (1.18)，描画出其空间分布图，就成为图 1.5 实线所示的图。 $E$  最初的极大点  $Q$ ，与式 (1.18) 括号中成为零值的点相对应。

其次，经过了很短时间，即把  $t = \Delta t$  代入式 (1.18)，再描画其空间分布图，就如图 1.5 中虚线所示。现在看一下  $Q$  点的移动， $Q$  点的位置，即式 (1.18) 括号中的值等于零时的  $x$  值，从  $x = 0$  移动到  $x = +\omega\Delta t/k$ 。显然， $Q$  点的位置，随着时间的过去是向着  $x$  的正向移动的。另外，

$$E = E_y \cos(kx + \omega t) \quad (1.19)$$

在  $\Delta t$  之后， $Q$  点的位置是从  $x = 0$  向  $x = -\omega\Delta t/k$  移动的，这是反向波。同理， $E = E_y \cos(-kx + \omega t)$  表示正向波  $E = E_y \cos(-kx - \omega t)$  表示反向波。

总之，这两种表示方法中当  $kx$  的符号和  $\omega t$  的符号相反时，向正方向前进，当  $kx$  的符号与  $\omega t$  的符号相同时，向反方向前进。在时间  $\Delta t$  之内，式 (1.18) 的  $Q$  点只移动  $\Delta x = \omega\Delta t/k$  的距离，所以波面的行进速度（位相速度）是

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (1.20)$$

【例题 1.1】有一个用下式表示的平面波

$$E = (-2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}) e^{i(\sqrt{3}x + y + 6 \times 10^8 t)}$$

计算 1) 偏振波方向，2) 前进方向，3) 位相速度，4) 振幅，5) 频率，6) 波长。

【答】

1)  $-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$

2)  $\mathbf{k} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$  方向是  $-\mathbf{k}$  的方向

3)  $|\mathbf{k}| = k = \sqrt{3 + 1} = 2$

$$\therefore v = \frac{\omega}{k} = 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

4)  $|E| = \sqrt{2^2 + 2^2} \times 3 = 4 \text{ 伏特/米}$

5)  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \times 10^8 \text{ 赫}$

6)  $\lambda = \frac{v}{f} = \pi \text{ 米}$

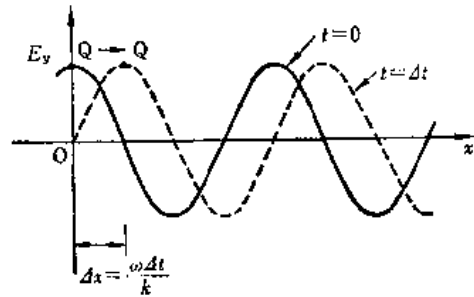


图 1.5 波前进方向的决定

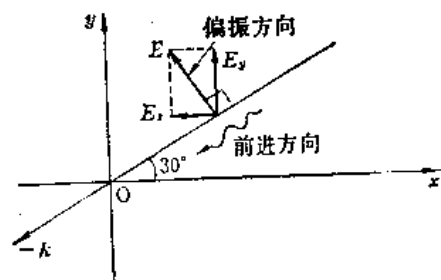


图 1.6 例题 1.1 中的偏振与前进方向

所以，这是向  $210^\circ$  方向前进的平面波。

表示同样的正方向前进的波，有两种方法，在本书中，规定时间项加负的符号，随时间变化的位相用  $e^{-i\omega t}$  表示。因此，如式 (1.18) 那样， $k_x$  的符号为正时，行进方向是  $x$  的正方向。

## 1.4 两个波的干涉

下面分析一下具有相同频率和振幅的两个波的干涉。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_0 \exp j(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \omega t) \\ E_2 &= E_0 \exp j(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_2 - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

首先，把这两个波矢量如图 1.7 那样分解成同方向的分量和反方向的分量，把连接  $\mathbf{k}_1$  和  $\mathbf{k}_2$  的顶端的直线  $\overline{PQ}$  的二等分点称为  $C$  点，把沿  $\overline{OC}$  的矢量称为  $\mathbf{k}'_1$  和  $\mathbf{k}'_2$ ，沿  $\overline{CP}$  和  $\overline{CQ}$  的矢量称为  $\mathbf{k}''_1$  和  $\mathbf{k}''_2$ 。即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}''_1 & \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}''_2 \\ \mathbf{k}'_1 &= \mathbf{k}'_2 = \mathbf{k}' & \mathbf{k}''_1 &= -\mathbf{k}''_2 = \mathbf{k}'' \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

把式 (1.22) 代入式 (1.21)，则合成电场为

$$E = \underbrace{2E_0 \cos(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} + \Delta\phi)}_{\text{振幅}} \underbrace{\exp j(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \phi - \omega t)}_{\text{位相}} \quad (1.23)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \\ \Delta\phi &= \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

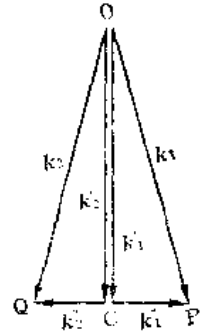


图1.7 波矢量的分解

注意，由于式 (1.23) 的第一因子没有时间项，因此，在用

$$\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} + \Delta\phi = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (1.25)$$

表示的点的轨迹上，电场经常是零，即不随时间变化。这点的轨迹，如图 1.8 所示是等间隔的，在空间固定的条纹形状，这种在空间固定的条纹就称为干涉波。

必须注意，干涉波的形状，只与反方向的分量  $\mathbf{k}''$  有关，与同方向的分量  $\mathbf{k}'$  无关。只要不存在反方向成分，也就不存在干涉波。

$\mathbf{k}''$  方向的干涉波的间隔，由式 (1.25) 可知，是  $\pi/|\mathbf{k}''|$ ，此外，还应注意两个波位相差  $\Delta\phi$  的变化会使干涉波向  $\mathbf{k}''$  的方向移动。

下面分析式 (1.23) 的第二个因子，注意，第二因子是表示  $\mathbf{k}'$  方向前进的正向波，所以，式 (1.23) 可以想象为瓦楞板那样的东西，在瓦楞板折叠的方向存在干涉波，行波则沿着折叠沟前进。

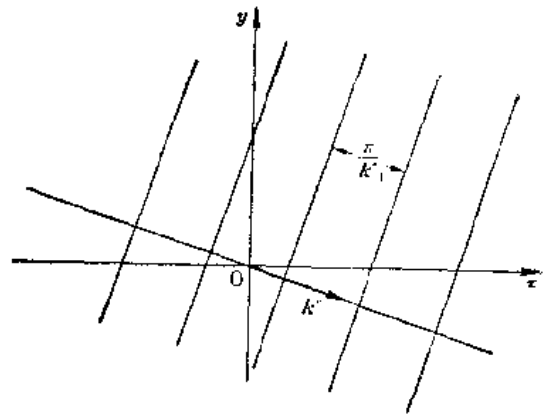


图1.8 干涉条纹

## 1.5 空间频率

说到频率，一般都指时间频率，此频率表示特定波形在单位时间内重复的次数。与此相仿，空间频率表示特定波形在单位距离内重复的次数。空间频率在表示透镜和底片等的分辨率和图象分析，信息处理方面是一个不可缺少的量。空间频率的单位是线对/毫米，线对/厘米，线对/吋等。此外，在表示视觉系统的响应特性方面，用单位立体角内的特定波形的数目来表示，使用的单位是线对/弧度，线对/弧度。

由于波形一般是两维的，所以对  $x$  和  $y$  两个方向的空间频率下的定义可用图1.9来加以说明。

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向的空间频率} \quad f_x &= \frac{1}{OA} = \frac{1}{\lambda_x} \\ y \text{ 方向的空间频率} \quad f_y &= \frac{1}{OB} = \frac{1}{\lambda_y} \end{aligned} \right\}$$

(1.26)

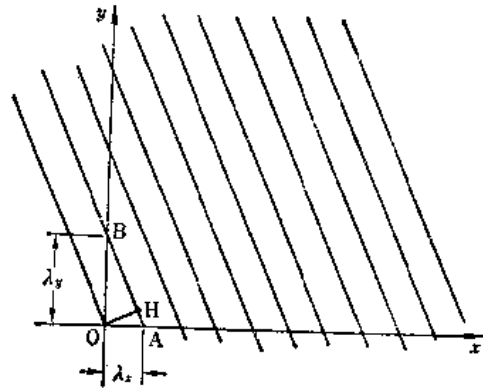


图1.9 空间频率的定义

而  $OH$  方向的空间频率  $f$  可用毕达哥拉斯定理求取，因此

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

所以

$$f = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2} \quad (1.27)$$

## 1.6 光学工程和傅里叶变换的关系

本节说明光源的光能分布和由光源照明的屏幕上的光能分布是成傅里叶变换关系的。

如图1.10所示，有限长度的线光源位于  $x_0$  轴上，设光源的长度为  $a$ ，光源的振幅分布为  $E(x_0)$ 。

由于线光源可看作一系列点光源，所以，在观察点  $P$  的光的振幅  $E(x_i, y_i)$  根据式(1.6)，成为

$$E(x_i, y_i) = \frac{K}{z_i} e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \int_{-a/2}^{a/2} E(x_0) e^{-j2\pi(x_i/\lambda z_i)x_0} dx_0 \quad (1.28)$$

式中 假定  $x_0^2/z_i \ll 1$

仔细观察一下式(1.28)，可发现其形式和傅里叶变换是一模一样的，傅里叶变换的公式是

$$G(f) = \mathcal{F}\{g(x_0)\} \ominus = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) e^{-j2\pi f x_0} dx_0 \quad (1.29)$$

现在，把式(1.28)和式(1.29)比较一下，有如下的对应关系。

⊖ 粗体无衬线字母表示函数取复数值，以后均用此符号代表一个复函数——译者注



$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{x_i}{\lambda z_i} \\ g(x_0) &= E(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

用式 (1.29) 来改写式 (1.28), 可得

$$E(x_i, y_i) = \frac{K}{z_i} e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \mathcal{F}\{E(x_0)\}_{f=x_i/\lambda z_i} \quad (1.31)$$

所以, 若要求屏幕上的光能分布, 只要把表示光源分布的公式加以傅里叶变换, 把所得结果中的  $f$  值用  $x_i/\lambda z_i$  置换就行了。

也就是只要计算光源的傅里叶变换, 就能知道其照射面上的光能是怎样分布的。

这一点, 在分析光的照明和漫射问题时, 不仅是个根本方法, 同时也是连续使用傅里叶变换的光信息处理的根本方法。对于比光波频率低的电波, 当然也是如此, 要计算天线的方向特性, 只要单独对天线上的电流分布进行傅里叶变换就行了。

尤其在射电天文学方面, 这也是个重要原理, 在射电天文学中, 是观察射电星体传到地面上的射电波的分布情况, 从而求知射电波发生源的形状。这与上述的从已知光源, 求知观察面上的分布情况刚好相反。因此, 这时, 只要对观察面上的分布情况进行傅里叶反变换就可以了。但是, 这种情况的位相测定, 一般是困难的, 而且变得相当复杂, 但在原理上是不变的。

在光学信息处理系统等的分析和设计中, 都要使用傅里叶变换, 概括这些领域就称为傅里叶光学 (Fourier optics)。

式 (1.31) 是仅仅用傅里叶变换式表示, 还未得出最终的数值。傅里叶变换的方法, 在使用上首先可以考虑查傅里叶变换表这一方法。在此, 为了复习先作些计算。

为了简化起见, 设线光源的振幅分布是相同的, 等于 1, 其长度也是 1, 表示光源的函数为

$$E(x_0) = \Pi(x_0) \quad (1.32)$$

式 (1.32) 右边的那个最后因子定义如下

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{其他的点} \end{cases} \quad (1.33)$$

这是在  $|x| \leq 1/2$  时, 系数值为

1, 在其他各点时, 全部是零的以符号表示的函数。这函数称为矩形函数 (rectangle function)

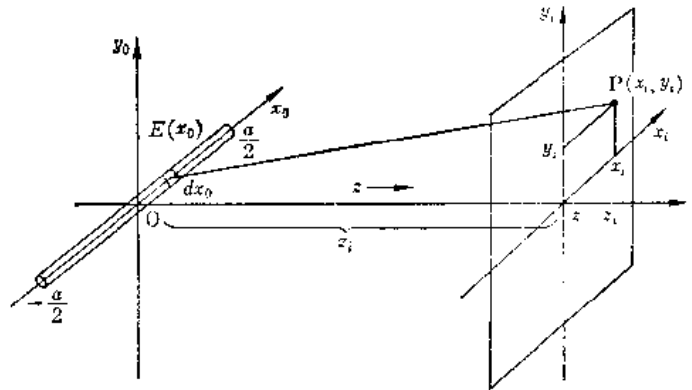


图1.10 线光源与观测点 P 的位置关系

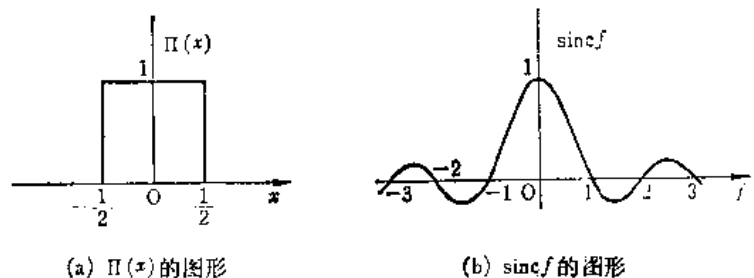


图1.11  $\Pi(x)$  及其傅里叶变换  $\text{sinc } f$

或称门函数 (gating function)。若用图表示这就成为图1.11 (a) 那样的形状。

矩形函数应用很广, 例如

$$\Pi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

根据式 (1.33) 的定义, 它是表示以  $x = b$  为中心, 仅仅在宽度  $a$  的区间内不是零的函数。

把式 (1.32) 代入式 (1.31) 时的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Pi(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) e^{-j2\pi fx} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi fx} dx \\ &= \left[ \frac{e^{j\pi fx} - e^{-j\pi fx}}{j2\pi f} \right] = \frac{\sin \pi f}{\pi f} \end{aligned} \quad (1.34)$$

式 (1.34) 是以  $1/\pi f$  为包络线的正弦函数, 此式称为变换函数 (sinc function), 写成

$$\mathcal{F}\{\Pi(x)\} = \text{sinc } f = \frac{\sin \pi f}{\pi f} \quad (1.35)$$

式 (1.35) 如用图表示的话, 就成为图1.11 (b) 的样式, 把式 (1.35) 的结果代入式 (1.31), 则  $E(x_i, y_i)$  成为

$$E(x_i, y_i) = \frac{K}{z_i} e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \text{sinc}\left(\frac{x_i}{\lambda z_i}\right) \quad (1.36)$$

屏幕面上的光振幅分布如图 1.12 (a) 所示。光的强度分布可用振幅的平方值表示, 如图 1.12 (b) 所示。

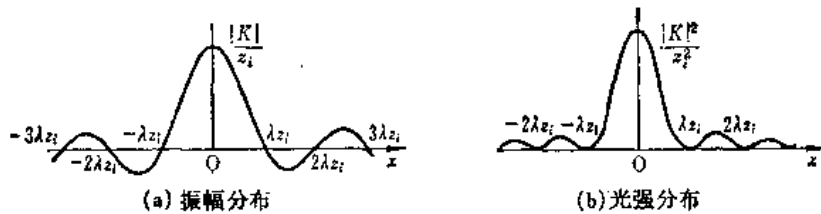


图1.12 线光源产生的照射光分布

## 1.7 在光学工程中应用的特殊函数及其傅里叶变换

本节中, 把和上节得出的矩形函数类似的以符号表示的函数及其傅里叶变换放在一起讨论, 这些函数, 仅仅是光学工程中频繁出现的函数。

### 1.7.1 三角形函数

三角形函数, 正如其名称所表明的那样, 其图形呈山形, 如图 1.13 (a) 所示, 这函数是怎样由  $\Pi(x)$  合成的呢! 即

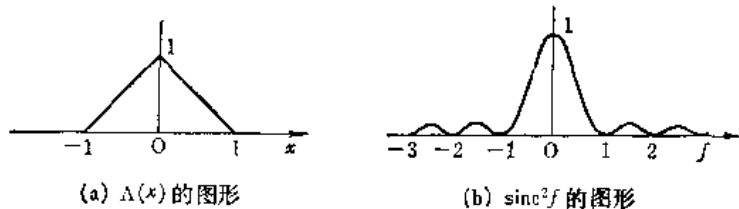


图1.13  $\Delta(x)$  及其傅里叶变换

$$\Delta(x) = \Pi(x) * \Pi(x) \quad (1.37)$$

因此, 这函数的傅里叶变换就成为

$$\mathcal{F}\{\Lambda(x)\} = \text{sinc}^2 f \quad (1.38)$$

### 1.7.2 符号函数

当  $x$  在正的区域中, 函数为  $+1$ , 当  $x$  在负的区域中, 函数为负, 这种函数称为符号函数 (sign function), 用  $\text{sgn } x$  表示, 其表达式可写成

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

下面, 求符号函数的傅里叶变换

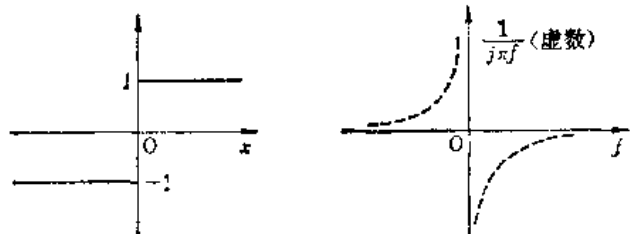
$$\mathcal{F}\{\text{sgn } x\} = \int_{-\infty}^0 -e^{-j2\pi f x} dx + \int_0^{\infty} e^{-j2\pi f x} dx \quad (1.40)$$

式 (1.40) 的积分成为不定值, 即, 如果对第一项实行形式性的积分

$$\left[ \frac{e^{-j2\pi f x}}{-j2\pi f} \right]_0^{\infty} = ?$$

若代入积分上限, 指数函数由于持续振动, 其值成为不定值。因此, 进行如下的数学变换, 根据式 (1.40) 得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{sgn } x\} &= \int_{-\infty}^0 \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} e^{-j2\pi f x + \alpha x} dx \\ &+ \int_0^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} e^{-j2\pi f x - \alpha x} dx \end{aligned}$$



(a)  $\text{sgn } x$  的图形 (b)  $\mathcal{F}\{\text{sgn } x\}$  的图形

图1.14  $\text{sgn } x$  及其傅里叶变换图

式中  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+}$  表示  $\alpha$  一边取正值, 一边接近于 0, 若把所取极限和积分进行交换, 先进行积分, 则上式等于

$$\begin{aligned} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[ \frac{-e^{j2\pi f x - \alpha x}}{j2\pi f - \alpha} + \frac{e^{j2\pi f x - \alpha x}}{-j2\pi f - \alpha} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{j2\pi f - \alpha} - \frac{1}{-j2\pi f - \alpha} \right] = \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

所以最后有

$$\mathcal{F}\{\text{sgn } x\} = \frac{1}{j\pi f} \quad (1.41)$$

### 1.7.3 阶跃函数

在  $x$  为正值的区域中, 函数值为  $+1$ , 在  $x$  为负值的区域中, 函数值为零, 这种函数称为阶跃函数 (step function), 用公式表示如下

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

阶跃函数，如果用符号函数表示，可以写成

$$H(x) = \frac{1}{2} \{ 1 + \operatorname{sgn} x \}$$

$H(x)$  的傅里叶变换，由式 (1.41) 可得

$$\mathcal{F}\{H(x)\} = \frac{1}{2} \left\{ \delta(x) + \frac{1}{j\pi f} \right\} \quad (1.43)$$

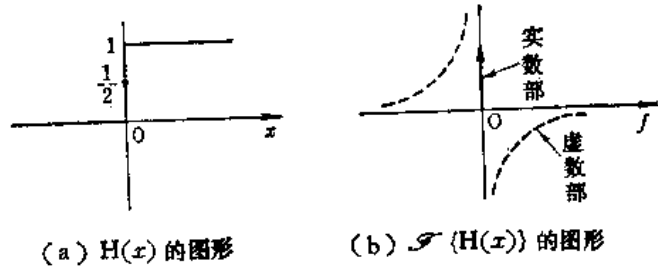


图1.15 阶跃函数及其傅里叶变换

图 1.15 是表示阶跃函数及其傅里叶变换。

### 1.7.4 $\delta$ 函数

$\delta$  函数 (delta function) 记为  $\delta(x)$  是具备以下两个条件的函数:

- (1)  $x = 0$  以外的各点，函数值是零， $x = 0$  的点，其值为无限大。
- (2) 此函数的曲线和  $x$  轴所

围的面积是 1。

为了帮助理解，可把  $\delta$  函数比喻成图 1.16 (a) 所示的正在不断向上拉伸的面团，这时，无论将面团拉得多么高，面团体积（这时，不是面积而是体积）总是一定的，而且，随着高度增高而使宽度变狭。

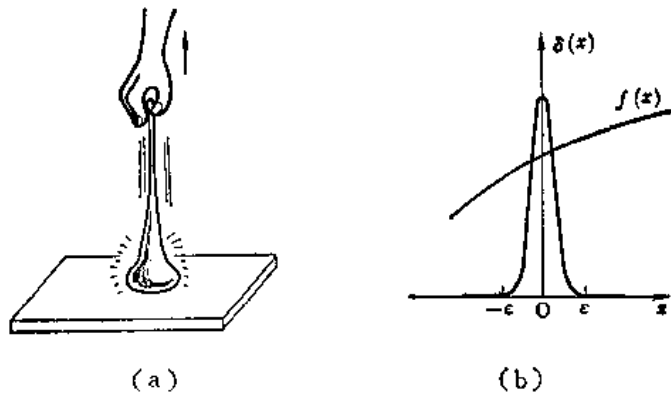


图 1.16 (a) 拉起的面团与  $\delta(x)$  的关系 (b)  $\delta(x)$  与  $f(x)$  的关系

$\delta(x)$  函数满足如下关系式:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (1.44)$$

式中  $\epsilon$  是微小的数值。

$\delta$  函数，作为其函数本身使用，倒不如它和别的函数的积的积分形式使用更为典型。即

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) \delta(x) dx = f(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = f(0) \quad (1.45)$$

$\delta(x)$  的值，在微小区间  $|x| < \epsilon$  以外是零。所以式 (1.45) 的积分，只要对  $|x| < \epsilon$  的区间积分就可以了，在这微小区间内， $f(x)$  的值是一定的，若考虑其为  $f(0)$ ，则能得到式 (1.45) 的值 (图 1.16 (b) 的情况)，式 (1.45) 可看作是  $\delta$  函数的一个定义。

$\delta$  函数的另一个重要定理是

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.46)$$

下面，利用式 (1.45) 来证明式 (1.46)：

先作  $ax = y$  的变数变换，

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{-a\epsilon}^{a\epsilon} f\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y) dy = \frac{1}{a} f(0) \quad (1.47)$$

把式 (1.45) 和式 (1.47) 两端的式子, 彼此作一比较, 得

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x) \quad (1.18)$$

把  $\delta(-ax)$  也作同样处理, 得

$$\delta(-ax) = \frac{1}{a} \delta(x) \quad (1.49)$$

由式 (1.48) 和式 (1.49) 可证明式 (1.46);

此外,  $\delta$  函数的傅里叶变换是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j2\pi f x} dx = e^{j2\pi f \cdot 0} = 1 \quad (1.50)$$

### 1.7.5 梳函数

如图 1.17, 当  $\delta$  函数以间隔为 1 无限重复时就称为梳函数 (shah function), 写作  $\text{III}(x)$ , 用数学式表示可写成

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-x) \quad (1.51)$$

shah 这个字, 最初从希伯来语和埃及的经文中得来, 由于其字形很像梳子, 所以就称为梳函数 (comb function) 梳子间隔以  $a$  表示时, 由式 (1.46) 和式 (1.51) 可得

$$\text{III}\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(n - \frac{x}{a}\right) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(an - x) \quad (1.52)$$

当使用式 (1.52) 时, 必须注意,  $\delta$  函数的高度与间隔  $a$  是成正比地增高的。

使用梳函数就能够产生使任意函数成为重复的周期函数。利用式 (1.45), 立即能得

$$g(x) * \delta(x-n) = g(x-n)$$

以间隔  $a$  使函数  $g(x)$  重复时, 采用下式

$$h(x) = \frac{1}{a} g(x) * \text{III}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (1.53)$$

现把其运算表示在图 1.18 上。

下面, 求梳函数的傅里叶变换, 因为梳函数是以 1 为周期的周期函数, 所以能展开成傅里叶级数。

傅里叶级数的定义是

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j2\pi n \frac{x}{T}} \quad (1.54)$$

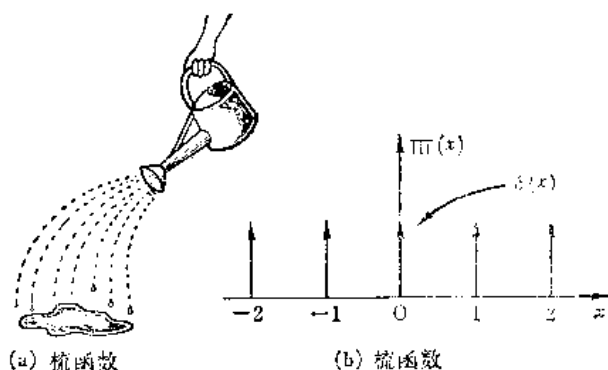


图 1.17 梳函数

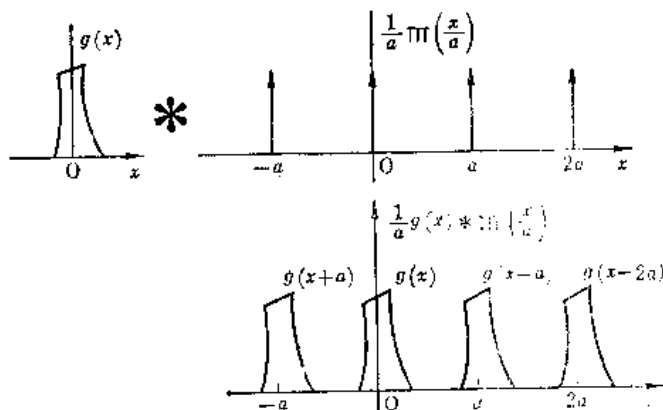


图 1.18 由梳函数作成周期函数

式中

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{j2\pi n \frac{x}{T}} dx \quad (1.55)$$

若将  $f(x) = \Pi(x)$ ,  $T = 1$  代入式 (1.54) 和式 (1.55), 将  $\Pi(x)$  展开成傅里叶级数为

$$\Pi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n x} \quad (1.56)$$

式 (1.56) 也是梳函数的又一表示式, 式 (1.56) 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\{\Pi(x)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) = \Pi(f) \quad (1.57)$$

得出了梳函数的傅里叶变换仍然是梳函数这一结果。

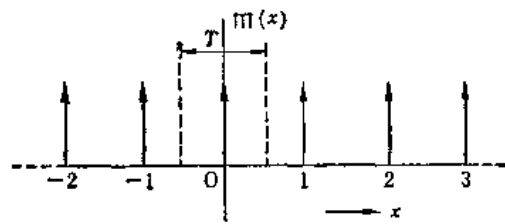


图1.19 梳函数的傅里叶展开

### 1.8 用柱面坐标时的傅里叶变换

在光学工程中, 往往把光束的断面、透镜的形状等设计成圆形分布的量, 在这种场合, 用柱面坐标表示傅里叶变换更为方便。

#### 1.8.1 汉克尔变换

用直角坐标的二维傅里叶变换可如下

$$G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (1.58)$$

下面用柱面坐标表示这关系式。

从图 1.20 可以看出, 直角坐标  $(x, y)$  和柱面坐标  $(r, \theta)$  之间有如下的关系

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ dx dy &= r dr d\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

此外在傅里叶变换面上, 同样可得

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \rho \cos \phi \\ f_y &= \rho \sin \phi \\ df_x df_y &= \rho d\rho d\phi \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

把式 (1.59) 和式 (1.60) 代入式 (1.58) 得

$$G(\rho, \phi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) e^{-j2\pi\rho r \cos(\theta-\phi)} r dr d\theta \quad (1.61)$$

式中, 把  $g(r \cos \theta, r \sin \theta)$  改写成了  $g(r, \theta)$ , 只要  $g(r, \theta)$  是单值函数 (single valued function),  $g(r, \theta) = g(r, \theta + 2\pi n)$ , 所以,  $g(r, \theta)$  是关于以  $2\pi$  为周期的  $\theta$  的周期函数, 因此,  $g(r, \theta)$  可以展开成傅里叶级数。把  $g(r, \theta)$  展开成傅里叶级数的各个成分, 成为只与  $r$  有关的函数。

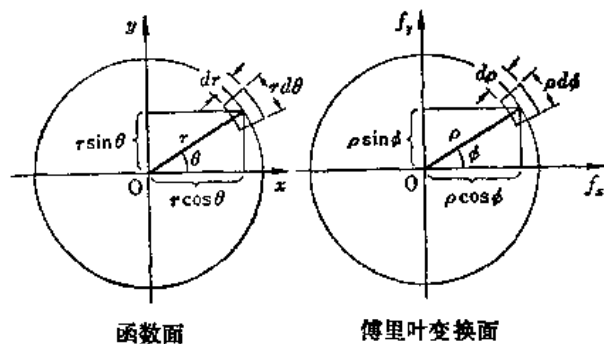


图1.20 用柱面坐标系统的傅里叶变换

$$g(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r) e^{jn\theta} \quad (1.62)$$

系数  $g_n(r)$  是

$$g_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) e^{-jn\theta} d\theta \quad (1.63)$$

把式 (1.62) 和式 (1.63) 代入式 (1.61) 得

$$G(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r g_n(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi r \rho \cos(\theta-\phi) + jn\theta} d\theta \quad (1.64)$$

利用贝塞尔函数的积分表示式

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{j(n\beta - z \sin\beta)} d\beta \quad (1.65)$$

使式 (1.64) 简化, 为了能适用于式 (1.65), 将式 (1.64) 的  $\cos(\theta - \phi)$  作  $\sin\beta$  那样的变数变换。

$$\theta - \phi = \beta + \frac{3\pi}{2} \quad (1.66)$$

〔注意〕 也有满足如下条件的变数变换。

$$\theta - \phi = \frac{\pi}{2} - \beta$$

若把此式代入指数的第二项  $jn\theta$ , 则成为  $-jn\beta + jn\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $jn\beta$  的符号是负值, 故不适用于式 (1.65)。

把式 (1.66) 代入式 (1.64) 的后面的积分中, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi r \rho \cos(\theta-\phi) + jn\theta} d\theta \\ &= e^{jn\frac{3}{2}\pi + jn\phi} \int_{-\phi-3\pi/2}^{2\pi-\phi-3\pi/2} e^{-j2\pi r \rho \sin\beta + jn\beta} d\beta \\ &= (-j)^n e^{jn\phi} 2\pi J_n(2\pi r \rho) \end{aligned} \quad (1.67)$$

把式 (1.67) 代入式 (1.64), 得

$$G(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n e^{jn\phi} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} r g_n(r) J_n(2\pi r \rho) dr \quad (1.68)$$

式中

$$g_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) e^{-jn\theta} d\theta \quad (1.69)$$

同理, 傅里叶反变换为

$$g(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n e^{-jn\phi} 2\pi \int_0^{\infty} \rho G_n(\rho) J_n(2\pi r \rho) d\rho \quad (1.70)$$

式中

$$G_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\rho, \phi) e^{-jn\phi} d\phi \quad (1.71)$$

在  $\theta$  方向无变化的特殊情况下, 即  $g(r, \theta)$  是回转对称的某种函数时

$$g_n(r) = \begin{cases} g_0(r) & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

这时, 式 (1.68) 和式 (1.70) 就变得非常简单, 即

$$G_0(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r g_0(r) J_0(2\pi r \rho) dr \quad (1.72)$$

$$g_0(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho G_0(\rho) J_0(2\pi r \rho) d\rho \quad (1.73)$$

式 (1.68)~式 (1.73), 仅仅是把直角坐标表示的傅里叶变换改写成为柱面坐标, 在本质上, 两者是完全相同的, 因此分析问题时, 无论用哪一种坐标的傅里叶变换, 所得的结果必须是相同的。因此仅把式 (1.68) 和式 (1.70) 的积分部分称为  $n$  次的汉克尔变换 (Hankel transform of  $n$ th order)。

当此变换为零次时, 则把式 (1.72) 和式 (1.73) 加以特殊处理, 称之为傅里叶-贝塞尔变换 (Fourier Bessel transform), 它用  $B\{\}$  的符号书写。

### 1.8.2 圆域函数

如图 1.21 (a) 所示, 在半径为 1 的圆内的点其值是 1, 在圆外的点其值为零的函数就称为圆域函数 (circle function)。

这函数的符号用  $\text{circ}(r)$ , 写成如下的关系式。

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (1.74)$$

下面, 求圆域函数的傅里叶变换。  $\text{circ}(r)$  是圆对称的, 所以用傅里叶-贝塞尔变换式 (1.72) 得

$$G(\rho) = B\{\text{circ}(r)\} = 2\pi \int_0^1 r J_0(2\pi r \rho) dr \quad (1.75)$$

进行变数变换  $2\pi r \rho = \tau$  则得

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi \rho^2} \int_0^{2\pi \rho} \tau J_0(\tau) d\tau = \frac{J_1(2\pi \rho)}{\rho} \quad (1.76)$$

其中使用了贝塞尔积分式

$$\int_0^z z J_0(\alpha z) dz = \frac{z}{\alpha} J_1(\alpha z) \quad (1.77)$$

图 1.21 (b) 是表示式 (1.76) 的图形。

### 1.8.3 汉克尔变换的例题

本节例举几个必须作汉克尔变换的例子。

〔例题 1.2〕 如图 1.22 所示, 镜面与垂直光轴的方向倾斜了  $\gamma$  角。

这时, 平面镜的反射波若用下式表示

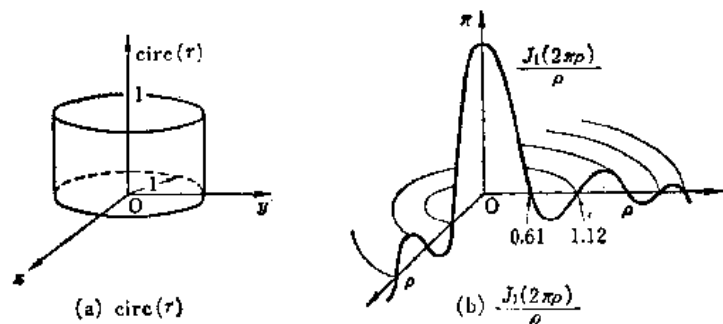


图 1.21 圆域函数及其贝塞尔变换



$$g(x, y) = e^{j2\pi k y \tan \gamma} \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1.78)$$

要求

- (a) 用柱面坐标表示  $g(x, y)$ ;
- (b) 将以上所得的结果  $g(r, \theta)$  对  $\theta$  展开成傅里叶级数;
- (c) 求  $g(r, \theta)$  的汉克尔变换。

设反射镜向  $xy$  平面的投影图是半径为 1 的圆。

[答] (a) 由图 1.22 (a) 得

$$y = r \sin \theta$$

$$2ky \tan \gamma = k\beta r \sin \theta \quad (1.79)$$

式中  $\beta = 2 \tan \gamma$

把式 (1.79) 代入式 (1.78), 得

$$g(r, \theta) = e^{ik\beta r \sin^2 \theta} \text{circ}(r) \quad (1.80)$$

(b) 利用式 (1.63) 得

$$g_n(r) = \frac{\text{circ}(r)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k\beta r \sin^2 \theta - n\theta)} d\theta \quad (1.81)$$

为了使用公式 (1.65), 设  $\theta = -\theta'$ , 则

$$g_n(r) = \frac{\text{circ}(r)}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 e^{i(n\theta' - k\beta r \sin^2 \theta')} d\theta' \quad (1.82)$$

设式 (1.65) 的  $\alpha$  为  $\alpha = -2\pi$ , 则

$$g_n(r) = \text{circ}(r) J_n(k\beta r) \quad (1.83)$$

代入式 (1.62) 得

$$g(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{circ}(r) J_n(k\beta r) e^{in\theta} \quad (1.84)$$

(c) 将上面求得的结果代入式 (1.68), 得

$$G(\rho, \phi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n e^{jn\phi} \int_0^1 r J_n(k\beta r) J_n(2\pi\rho r) dr \quad (1.85)$$

使用贝塞尔公式

$$\int_0^1 J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_n(\beta) J_{n+1}(\alpha) - \beta J_n(\alpha) J_{n+1}(\beta)] \quad (1.86)$$

则式 (1.85) 变成

$$G(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{(-j)^n e^{jn\phi}}{(k\beta)^2 - (2\pi\rho)^2} [k\beta J_n(2\pi\rho) J_{n+1}(k\beta) - 2\pi\rho J_n(k\beta) J_{n+1}(2\pi\rho)] \quad (1.87)$$

这个例题取材于激光反光镜的倾斜分析中的一部分。

[例题 1.3] 用柱面坐标表示沿  $y$  轴正向前进的平面波,  $E = e^{ik y}$ , 并展开成  $\theta$  的傅里叶

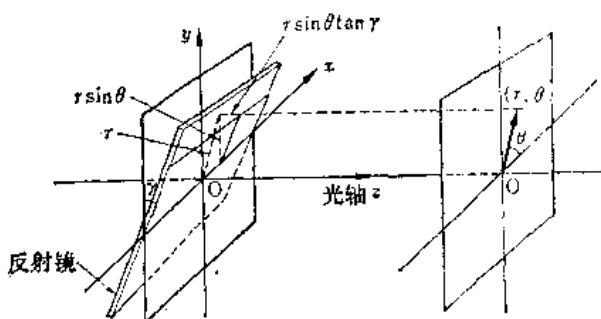


图1.22 倾斜放置的反射镜

级数。

〔答〕 可以原封不动地利用例题 1.2 所得的结果。

$$E = e^{ik^y} = e^{ikr \sin \theta} \tag{1.88}$$

用  $kr$  代替  $k\beta r$ , 利用式 (1.80) 和式 (1.84), 可得

$$e^{ikr \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{in\theta} \tag{1.89}$$

对于向  $y$  轴负方向前进的平面波  $e^{-ik^y}$ , 同理可得

$$e^{-ikr \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{-in\theta} \tag{1.90}$$

式 (1.89) 和式 (1.90) 可以看作是振幅  $J_n(kr)$ , 向着  $\theta$  方向以  $e^{in\theta}$  或  $e^{-in\theta}$  的位相振动的波群的集合。

### 习 题

习题 1.1 有一矢量波, 其表示式如下

$$E = \left( -\frac{i}{2} - \frac{j}{2} + k \right) e^{j2\pi(10(\pi+y+z) - 3 \times 10^8 t)}$$

要求求出: 1) 偏振方向 2) 行进方向 3) 位相速度 4) 振幅 5) 频率 6) 波长单位使用 MKS 制 (米-千克-秒制)。

习题 1.2 证明以下的等式

a)  $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(f)$  时  $\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\} = j2\pi fG(f)$

b)  $-\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right] * g(x) = f(x) * \left[-\frac{d}{dx}g(x)\right]$

c)  $\Pi(-x) = \Pi(x)$

d)  $\Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) = \Pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$

e)  $\pi\delta(\sin \pi x) = \Pi(x)$

f)  $\Pi\left(\frac{x}{2}\right) = \Pi(x) + \Pi(x)e^{j\pi x}$

g)  $\Pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin N\pi x}{\sin \pi x} \right|$

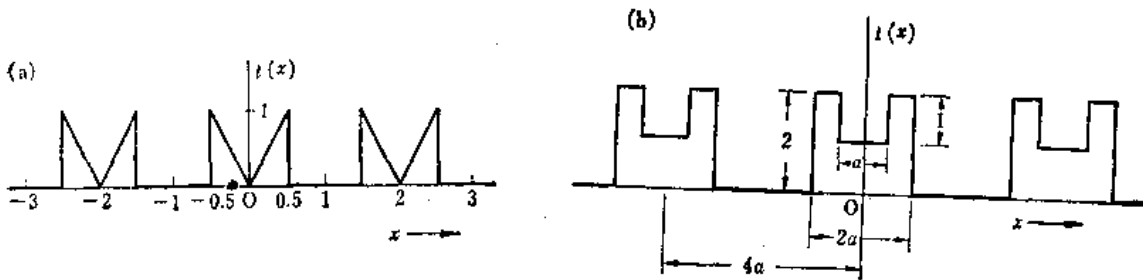


图1.23 透射率分布

习题 1.3 求图 1.23 所示的两种情况下的透射率分布  $t(x)$  的表示式及其傅里叶变换  $T(f)$ 。设  $x$  方向的长度是无限的。

习题 1.4 证明柱面坐标的  $\delta$  函数的积分表示式为

$$\delta(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r J_0(2\pi\rho r) dr$$

习题 1.5 透射率分布用下式表示时, 求  $g(r, \theta)$  的傅里叶变换  $G(\rho, \phi)$ 。

$$g(r, \theta) = \text{circ}(r) \cos \theta$$

习题 1.6 有如图 1.24 所示的半圆形的窗, 求透射率分布  $t(r, \theta)$  的傅里叶变换  $T(\rho, \phi)$ 。

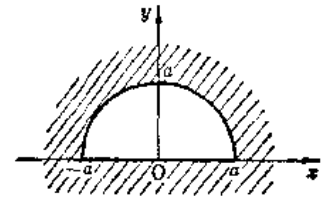


图1.24 半圆形掩模

## 文 献

- (1) C. L. Andrews, "Optics of the electromagnetic spectrum," Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1960.
- (2) J. W. Goodman, "Introduction to Fourier optics," McGraw Hill Book Comp., 1968.
- (3) R. Bracewell, "The Fourier transform and its applications," McGraw Hill Book Comp., New York, 1965.
- (4) 石黑, "光学", 共立全書, 共立出版, 東京, 1953.
- (5) 吉原, "物理光学", 共立出版, 東京, 1966.
- (6) G. R. Fowles, "Introduction to Modern Optics," Holt Rinehart and Winston Inc. New York, 1968.

## 第二章 衍射的基本理论

在牛顿发表粒子学说(Newton's mechanical theory of propagation of particles, 1704)的前后, 产生了惠更斯原理(Huygens' principle, 1690)。

当说明光线能够绕射到阴暗区域的衍射现象时, 惠更斯提出了“新的波前是以旧波前上的各点作为中心而相继产生的”这一原理。可是, 这原理有个缺点, 就是, 新的波前不仅在光的前进方向形成, 而且在其后方也形成。但是, 这一缺点首先由菲涅耳(A. J. Fresnel, 1818), 继后又由基尔霍夫(G. Kirchhoff, 1882)把光的周期性考虑进去后, 就完全解决了。

### 2.1 基尔霍夫积分定理

设光的电磁波的电场为 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。而 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 可以用波动方程式(2.1)的解来表示, 即

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.1)$$

在此, 若 $\mathbf{E}$ 不作为矢量处理, 仅仅近似地着眼于其中的一个分量, 把光波用数量 $v$ 表示, 则在不存在光源的区域中,  $v$ 可用波动方程式表示, 即

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0 \quad (2.2)$$

若利用球坐标分析自由空间的球面波的情况,  $v$ 的变化分量仅仅是 $r$ 方向。所以,  $\nabla^2 v$ 只残留有与 $r$ 有关的项, 即

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{d^2(rv)}{dr^2}$$

因此, 式(2.2)成为

$$\frac{d^2(rv)}{dr^2} + k^2(rv) = 0 \quad (2.3)$$

式(2.3)的一般解是

$$\begin{aligned} rv &= Ae^{ikr} + Be^{-ikr} \\ \therefore v &= A \frac{e^{ikr}}{r} + B \frac{e^{-ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.4)$$

在本书中, 时间的变化规定为 $e^{-i\omega t}$ , 所以式(2.4)的第一项表示从原点发散出去的球面波。第二项表示向着原点会聚的球面波。

根据格林定理(Green's theorem), 存在任意两个数量函数 $\phi$ 和 $\psi$ 时, 在图2.1所示的闭合曲面 $S$ 所包围的空间 $V$ 内有如下的关系

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{n} dS \quad (2.5)$$

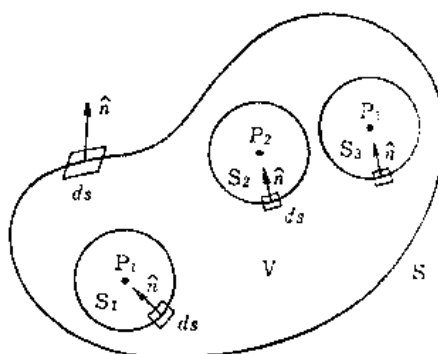


图2.1 为了适用于格林定理, 除去 $\phi, \psi$ 的不连续点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 而作成的体积 $V$

其中  $\hat{n}$  是从微小面积  $dS$ , 向着  $V$  的外面作法线的单位矢量。

式 (2.5) 中, 除了去掉  $\phi$  和  $\psi$  的第一次、第二次微分不连续的点  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , 而作出空间  $V$  这一条件外,  $\phi$  和  $\psi$  的函数选择是完全自由的。

格林定理是将空间内的积分变换成表面上的积分的公式。

$(\nabla\psi) \cdot \hat{n}$  是向着  $\hat{n}$  方向移动微小距离时,  $\psi$  值的变化率。即表示  $\hat{n}$  方向的微分, 把它写作  $\partial\psi/\partial n$ , 则 (2.5) 式可写成

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (2.6)$$

在应用格林定理时, 由于在上述条件的范围内,  $\phi$  和  $\psi$  的函数的选择是自由的, 所以  $\phi$  选择满足式 (2.2) 的

$$v = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.7)$$

而  $\psi$  应选择满足式 (2.8) 的  $u$ ,

$$\nabla^2 u + k^2 u = -g \quad (2.8)$$

式 (2.8) 如图 2.2 所示, 是存在空间分布光源时的波动方程式。

将式 (2.2) 代入式 (2.5) 的左边, 则其积分值  $I$  可以写成

$$I = - \int_V g \cdot \frac{e^{ikr}}{r} dv \quad (2.9)$$

$v$  的第一次和第二次微分值, 在原点  $r = 0$  处, 都是不连续的, 所以, 必须选择  $V$  的形状, 以便除去这点。从  $V$  中除去原点为  $P$ , 以  $P$  点为中心, 半径为  $\epsilon$  的微小球。在除去部分又形成新的球面状的曲面  $S_1$ , 所以, 全闭合曲面成为  $S_1 + S_2$ 。

把式 (2.7) 和式 (2.9) 代入式 (2.5), 得

$$\int_V g \frac{e^{ikr}}{r} dv + \int_{S_1} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_2} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (2.10)$$

式 (2.10) 的计算, 从左边第二项的积分着手, 当用球坐标表示积分值时, 得

$$\left[ \nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right] \cdot \hat{n} = \left[ \hat{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] \cdot \hat{n} = \left( jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \cdot \hat{n} \quad (2.11)$$

式中  $\hat{r}$  是由圆心指向圆外的单位矢量。

在半径为  $\epsilon$  的球面上, 单位矢量  $\hat{r}$  和  $\hat{n}$  是平行而反方向的, 所以,  $\hat{r} \cdot \hat{n}$  等于  $-1$ 。因此, 式 (2.11) 的球面上的值是

$$- \left( jk - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^{jk\epsilon}}{\epsilon} \quad (2.12)$$

把式 (2.12) 的结果用于式 (2.10) 的左边第二项, 取  $\epsilon \rightarrow 0$  的极限, 则左边第二项的积分值为

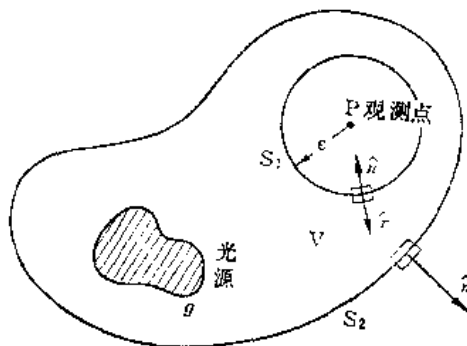


图2.2 适合于用格林定理求取分布光源产生的光振幅的空间  $V$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi\epsilon^2 \left[ \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} (\nabla u) \cdot \hat{n} + \left( jk - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} u(\epsilon) \right] = -4\pi u(0) \quad (2.13)$$

$u(0)$  是观察点 P 处的  $u$  值, 把式 (2.13) 的结果代入式 (2.10), 将  $u(0)$  写作  $u_p$  则得

$$u_p = \frac{1}{4\pi} \int_V g \frac{e^{ikr}}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} \cdot \hat{n} dS \quad (2.14)$$

这就得到给出观察点值的关系式。

光的振幅, 仅由光源的形状和观察的位置决定, 与积分空间  $V$  的形状选择无关。

如图 2.3 那样, 避开光源, 做成  $V'$  那种形状时,  $u_p$  的值当然是不变的。其证明方法, 留待习题去解决。这种情况下,  $\frac{1}{4\pi} \int g \frac{e^{ikr}}{r} dv$  的积分值是零。可是, 由于新的面增加  $S_3$ , 所以, 面积分值增加,  $u_p$  值不变, 因此, 只要对除去围绕观察点 P 的微小球面外的全表面  $S = S_2 + S_3$  进行积分, 就能求得  $u_p$  之值。即

$$u_p = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} \cdot \hat{n} dS \quad (2.15)$$

由于  $\hat{n}_4 = -\hat{n}_5$  所以  $S_4 + S_5$  的积分相互抵消。

式 (2.14) 或式 (2.15) 称为基尔霍夫积分定理 (integral theorem of Kirchhoff)。

基尔霍夫积分定理是表示闭合曲面的表面上的光能分布和曲面内的任意点的光振幅的关系式。为了使基尔霍夫公式适用于解决衍射问题而进一步改进的公式就是菲涅耳—基尔霍夫公式, 这个公式将在下面叙述。

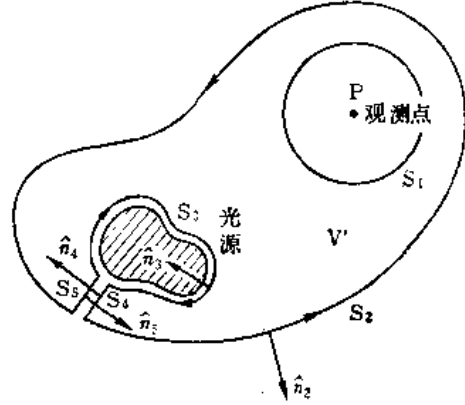


图2.3 除去光源后所作的适合格林定理的空间  
 $u_p$  值和图 2.2 的情况一样

## 2.2 菲涅耳—基尔霍夫公式

利用基尔霍夫积分定理, 求点光源  $P_0$  发出的光, 射到屏幕的光栏面上时的衍射图。基尔霍夫的积分区域取在光源以外, 如图 2.4 的虚线所示, 把屏幕的遮光面  $S_c$ , 屏幕的光瞳面  $S_A$  和以观测点为中心的半径  $R$  很大的半球面  $S_R$  三个曲面包围的区域, 作为积分区域。

当这样选择积分区域时,  $S_c$  上的光的振幅是零, 所以其积分也是零。式 (2.15) 的面积分为

$$u_p = \frac{1}{4\pi} \int_{S_A + S_R} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} \cdot \hat{n} dS \quad (2.16)$$

下面证明, 式 (2.16) 沿  $S_R$  的积分值是零。半径  $R$  的球面  $S_R$  上的积分为

$$\int_{S_R} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \nabla u - u \left( jk - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \hat{r} \right) \cdot \hat{n} dS$$

当  $R$  非常大时, 近似地成为

$$\int_{\Omega} \frac{e^{ikR}}{R} ((\nabla u) \cdot \hat{n} - jku) R^2 d\Omega \quad (2.17)$$

在此， $\hat{n}$  方向和  $\hat{r}$  方向是一致的，所以  $\hat{r} \cdot \hat{n}$  等于 1。 $\Omega$  是球面所张的立体角。现在还不能判明式 (2.17) 的值等于零。但是，只要满足如下条件它就确实等于零。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R ((\nabla u) \cdot \hat{n} - jku) = 0 \quad (2.18)$$

把上述条件称为佐默费尔德辐射条件 (Sommerfeld radiation condition)。是否满足这些条件，必须对各种情况进行检验。例如图 2.4，当  $R$  无限大时， $P_0$  和  $P$  之间的距离可以忽略不计。而且，屏幕的影响也可暂时忽略不计。所以，当点光源移到  $P$  点时的值，对  $S_A$  面上的振幅取近似，得到：

$$u_p \approx \frac{e^{jkR}}{R}$$

把此式代入式 (2.18) 得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \left( jk - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{jkR}}{R} - jk \frac{e^{jkR}}{R} \right] = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{jkR}}{R} = 0$$

很明显，它满足佐默费尔德辐射条件，如图上直观地表明的那样，不论光源还是屏幕放回原来的位置时， $u_p$  的值应该是小的。所以，在这种情况下，必定满足式 (2.18) 的条件。因此，可以看出式 (2.16) 在  $S_R$  上的积分也是零。下面，边参考图 2.4 边求  $S_A$  上的积分。

$u$  是从点光源  $P_0$  发出的球面波，设  $P_0$  点到屏幕上的点的距离为  $r_0$ ，则屏幕上的  $u$  为

$$u = A \frac{e^{jkr_0}}{r_0}$$

随着位置移动， $u$  向最大值的方向变化，所以矢量  $\nabla u$  的方向和单位矢量  $\hat{r}_0$  相同

$$\nabla u = A \hat{r}_0 \frac{d}{dr_0} \left( \frac{e^{jkr_0}}{r_0} \right) = \hat{r}_0 A \left( jk - \frac{1}{r_0} \right) \frac{e^{jkr_0}}{r_0} \quad (2.19)$$

而且

$$\nabla \left( \frac{e^{jkr}}{r} \right) = \hat{r} \left( jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{jkr}}{r} \quad (2.20)$$

若  $r_0$  和  $r$  比波长大得多，式 (2.19) 和式 (2.20) 的括号中的第二项与第一项相比，可以忽略不计，把上面的结果代入式 (2.16)，则

$$u_p = \frac{jA}{2\lambda} \int_{S_A} \frac{e^{jk(r_0+r)}}{r_0 r} [(\hat{r}_0 \cdot \hat{n}) - (\hat{r} \cdot \hat{n})] dS \quad (2.21)$$

若将单位矢量  $\hat{r}_0$  和单位矢量  $\hat{n}$  形成的角写作  $(\hat{r}_0, \hat{n})$ ，则

$$u_p = \frac{A}{j2\lambda} \int_{S_A} \frac{e^{jk(r_0+r)}}{r_0 r} [\cos(\hat{r}, \hat{n}) - \cos(\hat{r}_0, \hat{n})] dS \quad (2.22)$$

式 (2.22) 称为菲涅耳—基尔霍夫公式，式 (2.22) 被积分项中的

$$[\cos(\hat{r} \cdot \hat{n}) - \cos(\hat{r}_0, \hat{n})] \quad (2.23)$$

是与入射角和折射角有关的值，把它称为倾斜因数 (obliquity factor)。

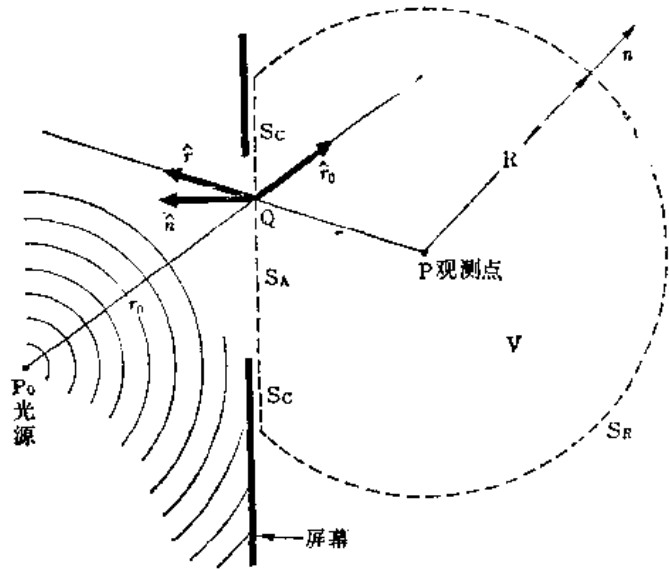


图 2.4 为便于求取屏幕上的衍射而作的基尔霍夫积分区域

在特殊情况下，即光源大致位于屏幕的中央时，如图 2.5 所示，设以光源  $P_0$  为中心的球面为  $S_A$ ，则倾斜因数为  $[1 + \cos\chi]$  于是

$$u_p = \frac{A}{j2\lambda} \int_{S_A} \frac{e^{jk(r_0+r)}}{r_0 r} [1 + \cos\chi] dS \quad (2.24)$$

而且，当入射光线大体上垂直于屏幕，观测点  $P$  大体上在其延长线上时，则倾斜因数的值可近似地取为 2。这样式 (2.22) 就成为

$$u_p = \frac{1}{j\lambda} \int_{S_A} u_{s_A} \cdot \frac{e^{jkr}}{r} dS \quad (2.25)$$

式中

$$u_{s_A} = A \frac{e^{jkr_0}}{r_0}$$

只要给出屏幕的光瞳面上的入射光的分布  $u_{s_A}$ ，就能求得  $u_p$  的值。式 (2.25) 可以解释为表示惠更斯原理的公式。

式 (2.25) 的被积分项表示振幅为  $u_{s_A} dS$  的球面波，因此式 (2.25) 是将沿  $S_A$  面的无限多个球面波源的影响加以积分所得的值。根据式 (2.24)，与入射方向的相反方向  $\chi = 180^\circ$ ，倾斜因数为零，这方向上不存在波面。这一结果，完全解决了惠更斯原理的不足之处。

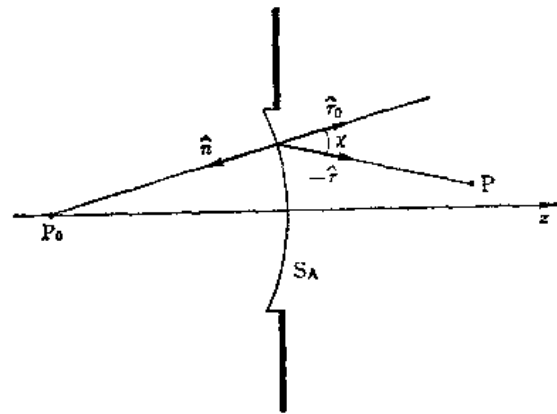


图2.5 光源大致在光屏的中央时，可以将  $S_A$  看成以  $P_0$  为中心的球面，这时的倾斜因数为  $(1 + \cos\chi)$

### 2.3 菲涅耳—基尔霍夫式的近似式

式 (2.25) 若形成积分阶梯，则能进行积分的情况非常少，而且，即使能积分，往往成为很复杂的计算，本节是求取式 (2.25) 的近似式。

在图 2.6 所示的直角座标系统中，要求光瞳面上 ( $z = 0$ ) 的输入光分布  $g(x_0, y_0)$  在屏幕面上 ( $z = z_i$ ) 产生的衍射象  $u(x_i, y_i)$ 。将式 (2.25) 用直角座标系统表示，则为

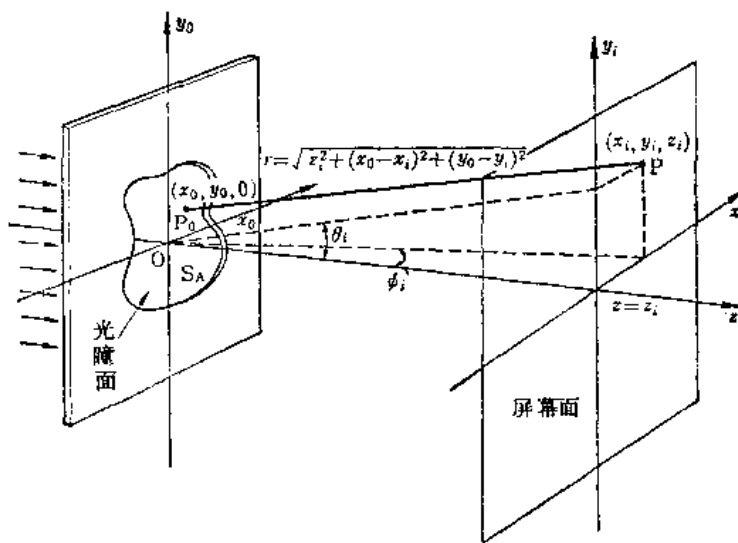


图2.6 光瞳面与屏幕面的座标系统



$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{e^{ikh r}}{r} dx_0 dy_0 \quad (2.26)$$

式中

$$r = \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$$

式(2.26), 其原来的形式,  $x_0$ 和 $y_0$ 是存在于平方根中的, 所以, 积分的运算, 一般是不容易的。当满足平方根中的第二项和第三项的和比第一项小得多这一条件时, 能够通过二项式展开, 求得近似值

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} \\ &= z_i \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}{z_i^2}} \\ &= z_i + \frac{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}{2z_i} - \frac{\{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2\}^2}{8z_i^3} \dots\dots \\ &= z_i + \frac{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}{2z_i} \\ &= z_i + \underbrace{\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i} - \frac{x_0 x_i + y_0 y_i}{z_i} + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i}}_{\text{夫琅和费近似}} - \frac{\{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2\}^2}{8z_i^3} \dots\dots \\ &= z_i + \underbrace{\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i} - \frac{x_0 x_i + y_0 y_i}{z_i} + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i}}_{\text{菲涅耳近似}} - \frac{\{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2\}^2}{8z_i^3} \dots\dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

式(2.27)中, 取到第几项为止要视到达屏幕的距离 $z_i$ 的远近而定。允许取到第三项时, 称为远方区域或夫琅和费区域 (Fraunhofer region)。近似式必须取到第四项的区域, 称近方区域或菲涅耳区域 (Fresnel region)。但是, 在十分接近光瞳面的区域, 连菲涅耳区域也不能采用, 这点必须加以注意。

使用菲涅耳近似还是夫琅和费近似, 决定于式(2.27)的第4项的值, 一般是由 $k(x_0^2 + y_0^2)/2z_i$ 的值大于 $\pi/2$ 还是小于 $\pi/2$ 来决定。例如, 计算边长为 $D$ 的正方形的光瞳面时, 当 $z_i = D^2/\lambda$ 时,  $k(x_0^2 + y_0^2)/2z_i$ 之值刚好等于 $\pi/2$ 弧度, 所以可作如下区别

$$z_i > \frac{D^2}{\lambda} \text{ 的区域称为夫琅和费区域。}$$

$$z_i < \frac{D^2}{\lambda} \text{ 的区域称为菲涅耳区域。}$$

(2.28)



图2.7 菲涅耳与夫琅和费区域

为了便于参考, 再计算一下 $D = 6$ 毫米,  $\lambda = 0.6 \times 10^{-8}$ 毫米时的 $D^2/\lambda$ , 其结果为60米。可以看出这是非常长的距离。

想在菲涅耳近似区域内, 观测夫琅和费图象时, 为了消除式(2.27)第4项的影响, 可以用凸透镜。由于凸透镜的厚度是随着半径, 以二次函数的形式变薄的, 所以, 给通过光的位相变化是

$$-k \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f} \quad (2.29)$$

通过凸透镜的光的位相, 是式(2.27)和式(2.29)的和。所以, 在 $z_i = f$ 的点, 取消了式

(2.27) 的第四项, 能够在近距离观察夫琅和费图形。这也是用凸透镜作傅里叶变换运算的基本原理。这些将在下一章即透镜这一章中详细叙述。

## 2.4 夫琅和费区域的近似式

上述的夫琅和费近似, 就是取到式(2.27)第三项为止的近似式, 把它代入式(2.26), 则

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) e^{-j2\pi \left( \frac{x_i x_0}{\lambda z_i} + \frac{y_i y_0}{\lambda z_i} \right)} dx_0 dy_0 \quad (2.30)$$

式中的分母值近似于  $r \approx z_i$ 。

若将式(2.30)写成二维傅里叶变换的形式, 并采用  $G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g(x_0, y_0)\}$  的记号, 则可写成

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} [G(f_x, f_y)]_{f_x = x_i/\lambda z_i, f_y = y_i/\lambda z_i} \quad (2.31)$$

式(2.31)是适用于夫琅和费区域的近似式。

图(2.6)中, 想用对原点的一定的角度表现衍射象时, 假设连结原点和  $(x_i, 0, z_i)$  点的直线和  $z$  轴的夹角为  $\phi_i$ , 连结原点和  $(0, y_i, z_i)$  点的直线和  $z$  轴的夹角为  $\theta_i$  时, 由于  $\sin\phi_i \approx x_i/z_i$ ,  $\sin\theta_i \approx y_i/z_i$ , 所以式(2.31)的  $f_x, f_y$  的值用下式即可

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -\frac{\sin\phi_i}{\lambda} \\ f_y &= -\frac{\sin\theta_i}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

## 2.5 菲涅耳区域的计算

将式(2.27)取到第四项为止代入式(2.26), 就可得到菲涅耳近似式, 根据是不是将式(2.27)中的  $(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2$  展开, 可以形成两个表示式, 就是卷积式和傅里叶变换式两种形式。若将没有展开的式子代入式(2.26), 则得

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{j2kz_i} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) e^{jk \frac{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}{2z_i}} dx_0 dy_0 \quad (2.33)$$

为了把式(2.33)写成和卷积完全相同的形式, 利用卷积的符号, 把式(2.33)改写成

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} u(x_i, y_i) &= g(x_i, y_i) * f_{z_i}(x_i, y_i) \\ f_{z_i}(x_i, y_i) &= \frac{1}{j\lambda z_i} e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

由于  $f_{z_i}(x_i, y_i)$  是把点光源放在原点时, 式子  $e^{ikr}/r$  中的  $r$  进行二项式展开的近似式。所以, 称之为点光源传递函数 (point source transfer function) (参照式(1.6))。若采用把式(2.27)中的  $(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2$  进行展开后所得关系式, 就成为

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) e^{jk\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i} - j2\pi\left(\frac{x_0 x_i}{\lambda z_i} + \frac{y_0 y_i}{\lambda z_i}\right)} dx_0 dy_0 \quad (2.35)$$

为了把此式写成傅里叶变换的形式，即可以写成。

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \mathcal{F} \left\{ g(x_0, y_0) e^{jk(x_0^2 + y_0^2)/2z_i} \right\}_{f_x = \frac{x_i}{\lambda z_i}, f_y = \frac{y_i}{\lambda z_i}} \quad (2.36)$$

采用式 (2.34) 计算，或者采用式 (2.36) 计算，所得的结果应该是完全相等的。可是，在各种不同的场合，选择何种计算方法，计算的难易程度是不同的。一般，在必须对  $u(x_i, y_i)$  进行傅里叶变换时，往往采用式 (2.34) 更为方便。

这是为什么呢？因为式 (2.34) 中的因子

$$e^{jk(x_0^2 + y_0^2)/2z_i} \quad (2.37)$$

的傅里叶变换是完全清楚的。 $u(x_i, y_i)$  的傅里叶变换可以表示成它和  $G(f_x, f_y)$  的积。在此，讲一下式 (2.37) 的傅里叶变换。首先，仅仅对于  $x_0$  的傅里叶变换是

$$\mathcal{F} \left\{ e^{j\pi x_0^2 / \lambda z_i} \right\} = \sqrt{z_i \lambda} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\pi \lambda z_i f_x^2} \quad (2.38)$$

对  $y$  的傅里叶变换是同样的。最终，点光源传递函数的傅里叶变换值为

$$\mathcal{F} \{ f_z(x_0, y_0) \} = e^{jkz_i} e^{-j\pi \lambda z_i (f_x^2 + f_y^2)} \quad (2.39)$$

〔例题2.1〕 如图 2.8 所示，求原点上有一点光源时，菲涅耳区域内的屏幕面上的衍射象，并将其结果与夫琅和费区域内的屏幕面上的衍射象作比较。

〔答〕 表示光源的函数是

$$g(x_0, y_0) = \delta(x_0)\delta(y_0) \quad (2.40)$$

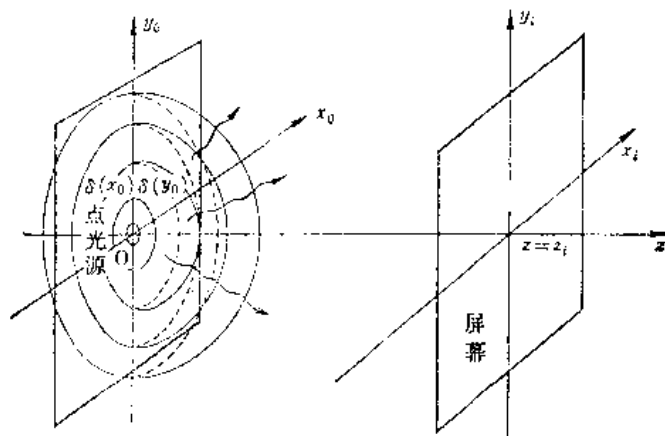


图2.8 点光源的非涅耳近似衍射象

首先，在菲涅耳区域有屏幕时，利用式 (2.34)，得

$$\begin{aligned}
 u(x_i, y_i) &= [\delta(x_i)\delta(y_i)] * \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jkz_i + jk(x_i^2 + y_i^2)/2z_i} \\
 &= \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

若采用式 (2.36), 则

$$\begin{aligned}
 u(x_i, y_i) &= \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \\
 &\mathcal{F} \left\{ \delta(x_0)\delta(y_0) e^{jk(x_0^2 + y_0^2)/2z_i} \right\}_{f_x = x_i/\lambda z_i, f_y = y_i/\lambda z_i}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

因为式 (2.42) 的傅里叶变换为 1, 所以,

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \tag{2.43}$$

使用不同的公式计算的结果是一致的。

当夫琅和费区域有屏幕时, 利用式 (2.31) 可得

$$\begin{aligned}
 u(x_i, y_i) &= \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \mathcal{F} \{ \delta(x_i)\delta(y_i) \}_{f_x = x_i/\lambda z_i, f_y = y_i/\lambda z_i} \\
 &= \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

从这例题的答案, 可以看出, 无论用哪个近似式, 所得结果是相同的。但是, 这种能得到完全相同结果的情况, 完全是特殊情况。还可看出, 此结果是与式 (2.34) 的点光源传递函数相等。

## 2.6 一维衍射

如图 2.9 所示的那样, 光源及光瞳面只在  $x_0$  轴方向有变化, 而在  $y_0$  轴方向无变化时, 表示光瞳面上光分布情况的函数, 可用下式表示

$$g(x_0, y_0) = g(x_0) \tag{2.45}$$

菲涅耳—基尔霍夫式, 以及由它导出的菲涅耳和夫琅和费近似式, 也有如下的变化。

若将式 (2.45) 代入式 (2.26), 则

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jkr}}{r} dy_0 \right] dx_0 \right\} \tag{2.46}$$

式中

$$r = \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$$

首先对式 (2.46) 中的

$$\left. \begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jkr}}{r} dy_0 \\
 r &= \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.47}$$

进行运算。

如图 2.9 所示, 设  $r$  向  $y_0 = 0$  的面上的投影线为  $\rho$ , 则

$$\rho = \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2} \tag{2.48}$$

将式 (2.48) 代入式 (2.47), 则

$$r = \sqrt{\rho^2 + (y_0 - y_i)^2} \quad (2.49)$$

把积分变数作如下变换

$$y_0 - y_i = \rho \sinh t \quad (2.50)$$

则可得

$$\frac{dy_0}{dt} = \rho \cosh t \quad (2.51)$$

利用式 (2.50),  $r$  可重新写成

$$r = \rho \cosh t \quad (2.52)$$

若将式(2.51)和式(2.52)代入式 (2.47), 则

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\rho \cosh t} dt = \pi H_0^{(1)}(k\rho) \quad (2.53)$$

式中,  $H_0^{(1)}(k\rho)$  是第一类零级汉克尔函数, 应用了式

$$H_0^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ja \cosh t} dt \quad (2.54)$$

将式 (2.53) 的结果代入式 (2.46), 则得

$$u(x_i) = \frac{\pi}{j\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) H_0^{(1)}(k\rho) dx_0 \quad (2.55)$$

式中

$$\rho = \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2} \quad (2.56)$$

这就是一维菲涅耳-基尔霍夫式。

下面, 求一维菲涅耳近似式  $k\rho \gg 1$  时的汉克尔函数为

$$H_0^{(1)}(k\rho) \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} e^{j(k\rho - \pi/4)} \quad (2.57)$$

在

$$z_i^2 \gg (x_0 - x_i)^2 \quad (2.58)$$

时, 可取近似式

$$\rho \approx z_i + \frac{(x_0 - x_i)^2}{2z_i} \quad (2.59)$$

将式 (2.57) 和式 (2.59) 代入式 (2.55), 则可得

$$u(x_i) = \frac{e^{j(kz_i - 3\pi/4)}}{\sqrt{z_i\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) e^{jk(x_0 - x_i)^2/2z_i} dx_0 \quad (2.60)$$

式 (2.60) 就是一维菲涅耳近似式, 当

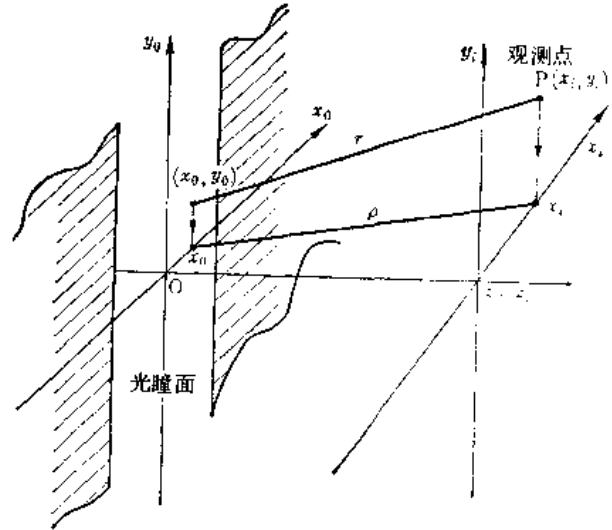


图2.9  $y_0$ 轴方向无变化时光障面的衍射象

$$z_i^2 \gg x_0^2$$

时, 可用同样方法求一维夫琅和费近似式, 其结果是

$$u(x_i) = \frac{1}{\sqrt{z_i \lambda}} e^{j(kz_i + kx_0^2/2z_i - 3\pi/4)} [\mathcal{F}\{g(x_0)\}]_{f = \frac{x_i}{\lambda z_i}} \quad (2.61)$$

## 2.7 菲涅耳积分

下面, 用式(2.36)求正方形光瞳的衍射图。设光瞳的大小为  $2a \times 2a$ , 入射波的振幅为 1, 则光瞳上的光分布函数可用下式表示

$$\Pi\left(\frac{x_0}{2a}\right)\Pi\left(\frac{y_0}{2a}\right) \quad (2.62)$$

把式(2.62)代入式(2.36), 设被积分项为 1, 把积分的上下限  $-\infty, +\infty$  改写成  $a, -a$ , 其被积分项是相同的, 所以

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) &= \frac{1}{j\lambda z_i} e^{jk[z_i + (x_0^2 + y_0^2)/2z_i]} \\ &\iint_{-a}^a e^{j\frac{\pi}{\lambda z_i}(x_0^2 + y_0^2) - j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \\ &= \frac{1}{j\lambda z_i} e^{jk[z_i + (x_0^2 + y_0^2)/2z_i] - j\pi\lambda z_i(f_x^2 + f_y^2)} \\ &\iint_{-a}^a e^{j\frac{\pi}{\lambda z_i}[(x_0 - f_x \lambda z_i)^2 + (y_0 - f_y \lambda z_i)^2]} dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

式中

$$f_x = x_i/\lambda z_i, \quad f_y = y_i/\lambda z_i$$

若作如下的变数变换。

$$\frac{2}{\lambda z_i} (x_0 - f_x \lambda z_i)^2 = \xi^2, \quad \frac{2}{\lambda z_i} (y_0 - f_y \lambda z_i)^2 = \eta^2$$

则式(2.63)变为如下形式

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) &= \frac{1}{2j} e^{jkz_i} \int_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a + f_x \lambda z_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a - f_x \lambda z_i)} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi \\ &\times \int_{-\sqrt{2/\lambda z_i}(a + f_y \lambda z_i)}^{\sqrt{2/\lambda z_i}(a - f_y \lambda z_i)} e^{j\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta \end{aligned} \quad (2.64)$$

式中

$$f_x = x_i/\lambda z_i, \quad f_y = y_i/\lambda z_i$$

若式(2.64)的积分的上、下限为  $\infty, -\infty$ , 众所周知, 其值为

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

可是, 由于上限、下限为有限值, 计算就有些麻烦。因此, 引入被证为是非涅耳积分 (Fresnel integral) 的函数  $F(\alpha)$ , 对式(2.64)加以改写:

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha e^{j\frac{\pi}{2}x^2} dx \quad (2.65)$$

在改写之前讲述一下此菲涅耳积分的性质。

菲涅耳积分可分实数部分和虚数部分

$$C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx \quad (2.66)$$

$$S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \quad (2.67)$$

前者称为菲涅耳余弦积分 (Fresnel cosine integral), 后者称为菲涅耳正弦积分 (Fresnel sine integral), 显然, 用上述符号表示时, 式(2.65)就成为

$$F(\alpha) = C(\alpha) + jS(\alpha) \quad (2.68)$$

若将  $C(\alpha)$  值取为实数轴, 将  $S(\alpha)$  值作为虚数轴, 当参数  $\alpha$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  变化时,  $F(\alpha)$  之值的变化曲线如图 2.11 所示, 成为在第一象限和第三象限中与原点对称的两个螺旋形。表示下式的值的复矢量, 可以用连接螺旋线上的  $\alpha = \alpha_1$  点和  $\alpha = \alpha_2$  点的直线表示

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{j\frac{\pi}{2}x^2} dx = C(\alpha_2) - C(\alpha_1) + j(S(\alpha_2) - S(\alpha_1))$$

螺旋线的收敛值是

$$C(\infty) = S(\infty) = -C(-\infty) = -S(-\infty) \quad (2.69)$$

此  $F(\alpha)$  曲线称为科纽螺旋线 (Cornu's spiral)。

现在, 再回到上述的狭缝问题, 若把菲涅耳积分  $F(\alpha)$  使用到式 (2.64), 并把  $f_x = x/\lambda z_i$ ,  $f_y = y/\lambda z_i$  代入, 则得

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{2j} e^{j\lambda z_i} \left\{ F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_i}}(a - x_i)\right) - F\left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda z_i}}(a + x_i)\right) \right\} \\ \times \left\{ F\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_i}}(a - y_i)\right) - F\left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda z_i}}(a + y_i)\right) \right\} \quad (2.70)$$

只要使用  $F(\alpha)$  的数表, 就能计算式 (2.70) 的值。现在, 让我们利用科纽螺旋线, 定性地讨论一下式 (2.70) 的值。

式 (2.70), 无论对  $x_i$ , 还是  $y_i$ , 其形式是相同的。所以, 只要对  $x_i$  作一分析, 式 (2.70) 的大括号内, 是两个菲涅耳积分的差。若用图 (2.12) 的复平面表示它的话, 可以表示成第二项的复平面上的点到第一项的复平面上的点的矢量。

首先, 在狭缝中心  $x_i = 0$  的点, 第一项和第二项的菲涅耳积分存在点对称的位置, 可用图 2.12 (a) 的矢量  $A$  表示。

其次, 在  $x_i = a/2$  的点, 第一项的值是接近原点, 第二项的值远离原点, 可用图上的矢

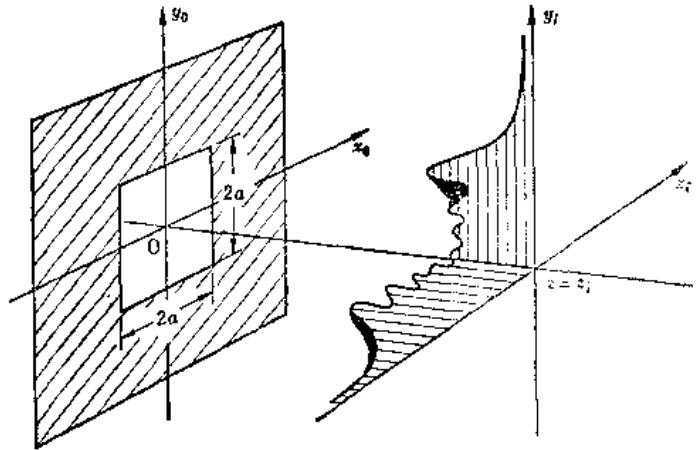


图2.10 正方形光瞳面的菲涅耳区域内的衍射象

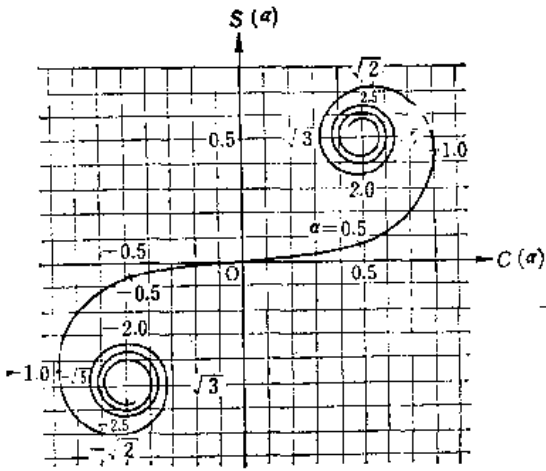


图2.11 科纽蜷线

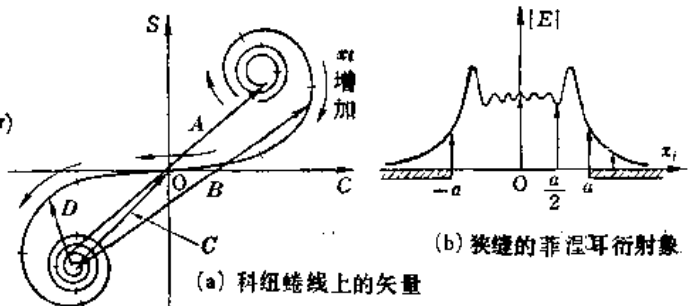


图2.12 观测点与科纽蜷线上矢量的关系

量  $B$  表示。

再其次，在  $x_i = a$  的点，即  $x_i$  进入几何光学的阴影中的点，第一项的值为零，第二项由于更远离原点，可用矢量  $C$  表示。

最后，在  $x_i > a$  的点，即  $x_i$  完全进入几何光学的阴影内的点，第一项的值进入第三象限，第二项则更远离原点，可用矢量  $D$  表示。矢量  $D$  的长度，随  $x_i$  的增加而单调地减少，光的振幅接近零。随着  $x_i$  点远离狭缝的中心，矢量的前端，向着箭头的方向前移。将上述结果归纳一下，振幅的分布图如图 2.12 (b) 所示。

### 习 题

习题 2.1 证明：在导出基尔霍夫积分定理时，无论如图 2.2 那样把光源包括在积分空间中，还是如图 2.3 那样，去掉光源的积分空间， $u_p$  的值只与光源的形状和观察点的位置有关，与积分空间的选择无关。

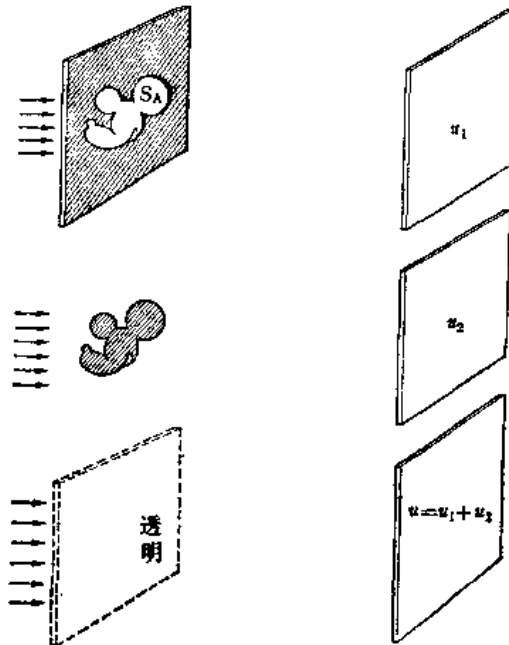


图2.13 巴俾涅原理的说明



习题 2.2 巴俾涅原理 (Babinet's Principle) 是“开在挡板上的光瞳形成的衍射象和与光瞳形状相同的不透明物形成的衍射象之和, 等于无任何挡板时的光分布”的原理。图 2.13 是说明此原理的示意图,  $u_1$  和  $u_2$  中, 只要知道其中之一, 另一个就可根据此原理立即知道。

利用菲涅耳—基尔霍夫式证明此原理。

习题 2.3 证明: 当输入光分布在  $y_0$  轴方向不变, 可写成下式:

$$g(x_0, y_0) = g(x_0)$$

将式 (2.33) 在  $x_0$  方向取夫琅和费近似, 在  $y_0$  方向取菲涅耳近似时, 就能导出与式 (2.51) 成正比的值。

习题 2.4 证明: 在科纽蜷线上作参数值为  $\alpha$  的点的切线, 则切线和  $C$  轴的交角是  $(\pi/2)\alpha^2$ , 参考此结果和科纽蜷线, 计算使  $C(\alpha)$ ,  $S(\alpha)$  的值为极大和极小的一系列的  $\alpha$  值。

习题 2.5 证明: 科纽蜷线对原点是点对称的。

## 文 献

- (1) J. A. Stratton, "Electromagnetic Theory," McGraw Hill Book Company, New York, 1941.
- (2) J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics," McGraw Hill Book Company, New York, 1968.
- (3) A. Sommerfeld, "Optics" Academic Press Inc., New York, 1954.
- (4) M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics," Pergamon Press, New York, 1964.
- (5) A. Papoulis, "Systems and Transforms with Applications in Optics," McGraw Hill Book Company, New York, 1968.
- (6) J. M. Stone, "Radiation and Optics," McGraw Hill Book Company, New York, 1963.

### 第三章 各种衍射象的计算实例

本章是汇集了各种衍射象的计算实例。

#### 3.1 采用直角坐标时，光瞳衍射象的计算实例

〔例题3.1〕 求图 3.1 所示的长为  $a \times b$  的矩形孔的衍射象。屏幕在夫琅和费区域，其距离为  $z = z_i$

〔答〕 输入函数  $g(x_0, y_0)$  为

$$g(x_0, y_0) = \Pi\left(\frac{x_0}{a}\right) \Pi\left(\frac{y_0}{b}\right) \quad (3.1)$$

由式 (1.35), (2.31) 得

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} absinc\left(a \frac{x_i}{\lambda z_i}\right) sinc\left(b \frac{y_i}{\lambda z_i}\right) \quad (3.2)$$

省略掉式 (3.2) 的系数，可把  $x$  轴上的振幅和光强表示于图 3.2 (a), (b)。

〔例题3.2〕 有一边长为  $2a$  的正方形光源。在此面光源中，放置一个边长为  $a$  的正方形的掩模，其中心落在  $(\xi, \eta)$  上。求离开光源  $z_i$  的夫琅和费区域内的屏幕上的光分布。

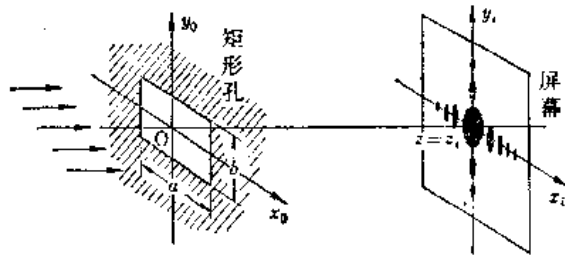


图3.1 矩形孔的衍射象

〔答〕 只要从大的正方形中除去小的正方形部分，就可得到表示光源的函数  $g(x_0, y_0)$ ，即

$$g(x_0, y_0) = \Pi\left(\frac{x_0}{2a}\right) \Pi\left(\frac{y_0}{2a}\right) - \Pi\left(\frac{x_0 - \xi}{a}\right) \Pi\left(\frac{y_0 - \eta}{a}\right) \quad (3.3)$$

它的傅里叶变换  $G(f_x, f_y)$  为

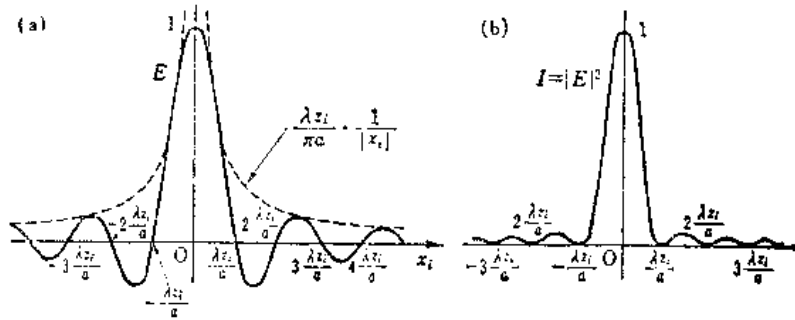


图 3.2

(a) 矩形孔衍射象的振幅  $E(x_i, 0)$  (b) 矩形孔衍射象的光强  $I(x_i, 0)$

$$G(f_x, f_y) = 4a^2 \operatorname{sinc} 2af_x \operatorname{sinc} 2af_y - a^2 \operatorname{sinc} af_x \operatorname{sinc} af_y e^{-j2\pi(f_x + f_y)\eta} \quad (3.4)$$

利用式 (2.31) 可得

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} e^{jk[z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i]} \{G(f_x, f_y)\}_{f_x = x_i/\lambda z_i, f_y = y_i/\lambda z_i} \quad (3.5)$$

在特殊情况下, 即  $\xi = \eta = 0$  时, 式 (3.5) 的  $f_x$  轴上的分布, 可用图 3.4 中的实线来表示。

所以, 即使有相当大的掩模面, 屏幕面上的光分布也是变化不大的。

〔例题 3.3〕 有图 3.5 所示的  $x_0 = a, y_0 = x_0, y_0 = -x_0$  三条线包围的三角形的面光源。求距离为  $z_i$  的大象和费区域内的屏幕上的光能分布。

〔答〕 因为这种情况下,  $y_0$  积分的上限与下限是随着  $x_0$  值的变化而变化的。所以, 首先求  $x_0$  和  $x_0 + dx_0$  之间的狭条的积分, 然后求  $x_0$  从 0 到  $a$  的积分

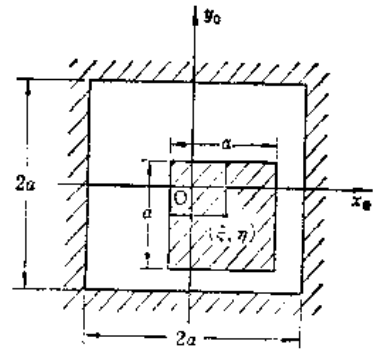


图3.3 有掩模的面光源

$$\begin{aligned} G(f_x, f_y) &= \int_0^a dx_0 \int_{-x_0}^{x_0} e^{-j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dy_0 \\ &= \int_0^a e^{-j2\pi f_x x_0} \left[ \frac{e^{-j2\pi f_y x_0} - e^{+j2\pi f_y x_0}}{-2j\pi f_y} \right] dx_0 \\ &= \frac{j}{2\pi f_y} \int_0^a [e^{-j2\pi(f_x + f_y)x_0} - e^{-j2\pi(f_x - f_y)x_0}] dx_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

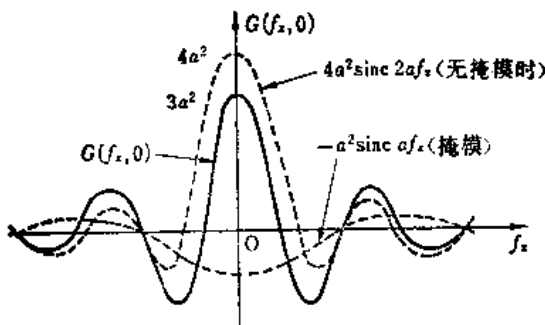


图3.4  $G(f_x, 0)$  的图形

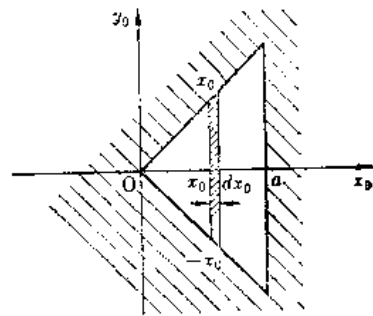


图3.5 三角形的面光源

通过积分并整理, 可得

$$= \frac{ja}{2\pi f_y} [e^{-j\pi(f_x + f_y)a} \operatorname{sinc}(f_x + f_y) a - e^{-j\pi(f_x - f_y)a} \operatorname{sinc}(f_x - f_y) a] \quad (3.7)$$

对最终结果式 (3.7) 进行分析, 首先要分析一下  $f_x (= x_i/\lambda z_i)$  轴上的分布情况。若将  $f_y = 0$  直接代入式 (3.7), 则 (3.7) 式就成  $0/0$  形式的不定式。因此, 必须求出  $f_x \rightarrow 0$  时的极限值, 即当

$$\Delta = \pi a f_y \ll \pi a f_x \quad (3.8)$$

时, 有:

$$G(f_x, \Delta) = a^2 \left( \frac{\sin \Delta}{\Delta} \right) e^{-j\pi f_x \Delta} \operatorname{sinc} f_x a$$

$$G(f_x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} G(f_x, \Delta) = a^2 e^{-j\pi f_x \Delta} \operatorname{sinc} f_x a \quad (3.9)$$

图 3.6 就是表示式 (3.9) 的图形。虽然光源并不是左右对称的，但是屏幕上的光能分布情况却表示出一定程度的对称性。即，振幅是对称于  $f_x$  轴的，位相是反对称的。此外，光强分布  $|G(f_x)|^2$  是完全对称的。

根据式 (3.7)， $f_y$  轴上分布的表示式就成为

$$G(f_y) = G(0, f_y) = a^2 [\operatorname{sinc} f_y a]^2 \quad (3.10)$$

从此式看出  $f_y$  轴上的分布，随着  $f_y$  值的增加，比  $G(f_x)$  衰减得更快。再分析一下  $45^\circ$  方向，即  $f_x = f_y$  轴上的光能分布情况，只要将座标轴旋转  $45^\circ$  即可，若作如下的变数变换，

$$\begin{cases} \sqrt{2} X = f_y + f_x \\ \sqrt{2} Y = f_y - f_x \end{cases} \quad (3.11)$$

则式 (3.9) 就成为

$$G(X, Y) = \frac{ja}{\sqrt{2} \pi (X+Y)} \left[ e^{-j\sqrt{2}\pi a X} \operatorname{sinc} \sqrt{2} a X - e^{j\sqrt{2}\pi a Y} \operatorname{sinc} \sqrt{2} a Y \right] \quad (3.12)$$

X 轴上的光能分布就成为

$$G(X, 0) = \frac{ja}{\sqrt{2} \pi X} \left[ e^{-j\sqrt{2}\pi a X} \operatorname{sinc} (\sqrt{2} a X) - 1 \right] \quad (3.13)$$

Y 轴上的光能分布也相同，图 3.7 就是直角三角形的衍射象的照片。

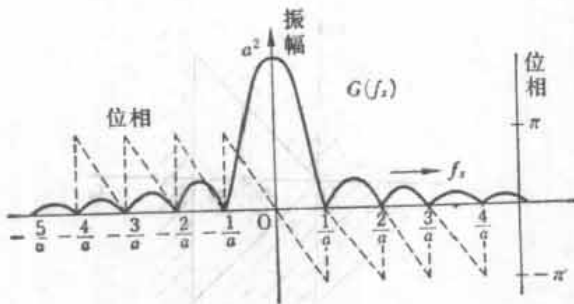


图3.6  $f_x$ 轴上的光振幅与位相

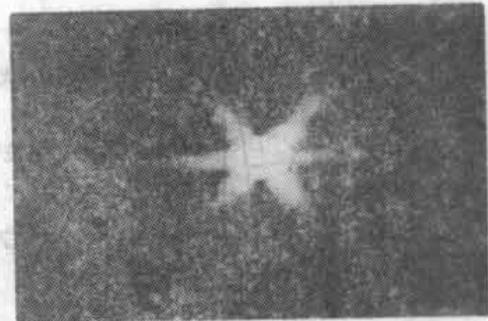


图3.7 直角三角形的衍射象的照片

从光能分布看在各边的垂直方向上是拖着一条尾巴，其中最长边的垂直的方向上，其光能分布也最强。由此看出，屏幕上的衍射图形，主要决定于光源的边缘的形状。因此，只要记住，当光源的边缘形状一定时，屏幕上的光能分布是在垂直于边缘的方向上拖着亮的尾巴。因此对于那些无法作计算的各种形状的光源，也能够概略地作出光能分布的判断。

### 3.2 边缘的衍射象

从上例可清楚地看出，光源的边缘形状，对衍射图形的影响很大。半无限光源面是只具

有一条边的光源。所以，很适于了解边缘的影响。下面，用例题加以说明。

〔例题3.4〕 有一个如图 3.8 所示的半无限光源面，求屏幕上的光能分布图。

〔答〕 表示光源，用阶跃函数是最合适的，这时输入函数用下式表示

$$g(x_0, y_0) = H(x_0) \quad (3.14)$$

式 (3.14) 对  $x_0$  的傅里叶变换，可由式 (1.43) 得到。对  $y_0$  的傅里叶变换是  $\delta(f_y)$ ，所以，利用式 (2.31)，衍射象就成为

$$u(x_i, y_i) = \delta(f_y) \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jkz_i + jkx_i^2/2z_i} \left[ \frac{1}{j2\pi f_x} + \frac{1}{2} \delta(f_x) \right]_{f_x = x_i/\lambda z_i, f_y = y_i/\lambda z_i} \quad (3.15)$$

图 3.9 是表示式 (3.15) 的图形。

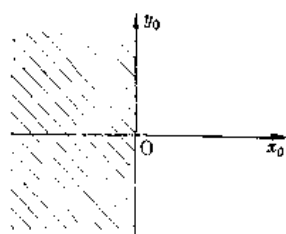


图3.8 半无限光源

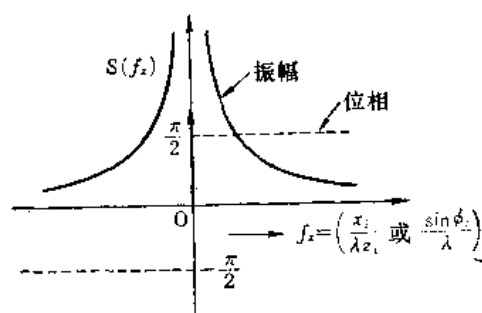


图3.9 半无限光源的衍射图形

现在，再把例题 3.4 的结果讨论得再详细一些。我们知道不仅在  $f_x > 0$  的部分，即光线直接照射的部分，而且，在  $f_x < 0$  的部分，即直接照射不能达到的部分，仍有光线绕射进去，这种现象就称为衍射现象。而且应该注意到，无论在阴影的部分，还是直接照射的部分，其强度总是相同的。

但是，日常生活的经验告诉我们，“照到光的地方比阴影的地方亮”，差别在那里呢？上面求得的结果，需要屏幕离边缘无限远。这时，因为需要满足式 (2.28)，所以，必须在距离比光源尺寸大得多的地方观察。这例题中，光源尺寸是半无限大，要满足式 (2.28)，实际上是不可能的。

另一个考虑方法是，光源的大小，无论做得多么大，也是有限的，因此，直线传播的光的断面，无论传播到多么远，也是有限的。可是，一旦衍射，其衍射的光，传播得越远，就离直线传播的光越远。当光源到光屏的距离为无限大时，衍射光偏离直线传播的光的数量也成为无穷大。与离开此衍射光的原点为无限大的偏离量相比，有限尺寸的直线前进的光的断面，能看作一点，即在原点这个位置上，是  $1/2 \delta(x_i/\lambda z) \delta(y_i/\lambda z)$ 。

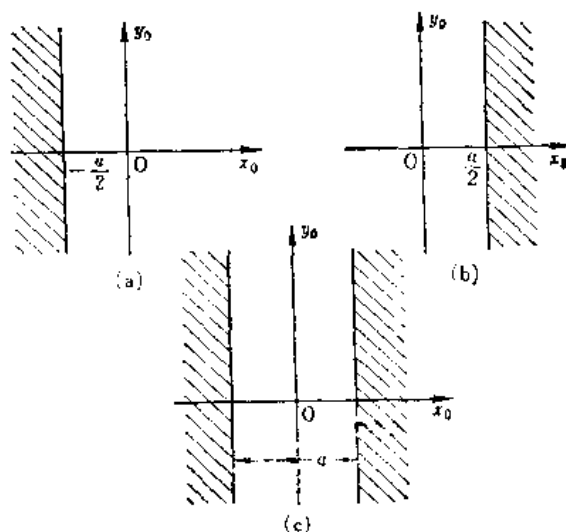


图3.10 带状光源与半无限光源

而衍射光以原点为中心，无论在  $f_x$  的正方向，还是  $f_x$  的负方向，都有分布。

此外，在无边缘的情况下，成为整个面上均匀的光源，其屏幕上的分布是  $\delta(x_i/\lambda z_i) \delta(y_i/\lambda z_i)$ 。若用  $\sin\phi_i/\lambda$ ,  $\sin\theta_i/\lambda$  代替  $x_i/\lambda z_i$ ,  $y_i/\lambda z_i$ ，则能表示直线传播的光和衍射光分布的区别。上面所说的情况也许容易理解些。

另外，只有一个边缘的情况，由于无干涉现象，衍射图形不形成条纹，和图 3.9 一样，形成衰减的图形。

下面，把带状光源和半无限光源的衍射象作一比较。图 3.10(a) 的半无限光源是将例题 3.4 中的光源，向  $x$  的负方向移动  $a/2$  而形成的。而 (b) 是以  $y$  轴为对称轴，将图形 (a) 翻转过来而形成的。首先，将傅里叶变换的位移定理应用到例题 3.4 的答案中，就能求出 (a) 所产生的衍射象。(a) 的光源函数为：

$$H_a(x_0) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sgn}\left(x_0 + \frac{a}{2}\right) + 1 \right] \quad (3.16)$$

其傅里叶变换为

$$\mathcal{H}_a(f_x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{j\pi f_x} e^{i\pi a f_x} + \delta(f_x) \right] \quad (3.17)$$

而 (b) 的光源函数为

$$H_b(x_0) = \frac{1}{2} \left[ -\operatorname{sgn}\left(x_0 - \frac{a}{2}\right) + 1 \right] \quad (3.18)$$

其傅里叶变换为

$$\mathcal{H}_b(f_x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{j\pi f_x} e^{-i\pi a f_x} + \delta(f_x) \right] \quad (3.19)$$

而 (c)，前面已经求得，是

$$H_c(x_0) = \Pi\left(\frac{x_0}{a}\right) \quad (3.20)$$

$$\mathcal{H}_c(f_x) = a \operatorname{sinc} a f_x$$

若把图 3.10 中的 (a)，(b)，(c)，所示的形状作一比较，把 (a) 的边缘和 (b) 的边缘组合起来，就成为 (c) 的带状。(c) 的带状的数学表示式，参考图 3.11 而得到

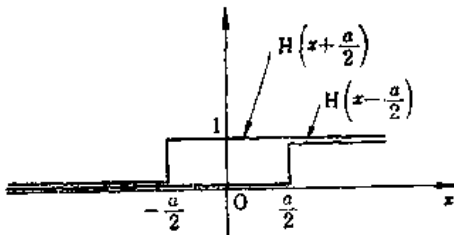


图3.11 用阶跃函数表示带状光源

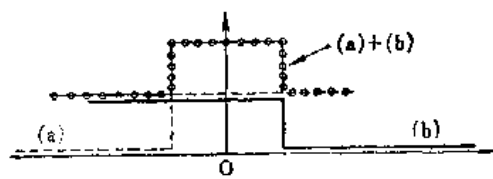


图3.12 边缘之和并不是带状，也就是说看成边界条件本身的叠加是错误的

$$\begin{aligned} H_c(x_0) &= H\left(x + \frac{a}{2}\right) - H\left(x - \frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{sgn}\left(x_0 + \frac{a}{2}\right) + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \operatorname{sgn}\left(x_0 - \frac{a}{2}\right) + 1 \right) \end{aligned}$$

将位移定理应用到上式中，并作傅里叶变换，则得

$$g_{\ell_c}(f_x) = \left[ \frac{e^{j\pi f_x a}}{j2\pi f_x} - \frac{e^{-j\pi f_x a}}{j2\pi f_x} \right] = a \frac{\sin \pi f_x a}{\pi f_x a} = a \operatorname{sinc} f_x a \quad (3.21)$$

因而得到和上面相同的结果。

〔注意〕表示带状的式 (3.20)，并不是表示边缘的式 (3.16) 和式 (3.18) 的和 (参考图 3.12)。光的振幅符合叠加原理。但是，并不意味着把边界条件 (轮廓) 本身进行叠加。

具有两个边缘的带状光源，由左边的边缘产生的衍射光，照射到右边的边缘上，它又被右边的边缘照射，即存在着这种边缘间的相互作用。由于相互作用，光瞳面的附近，形成复杂的电场分布。但是，应该注意，在菲涅耳-基尔霍夫式中，是用存在边缘以前的分布代替这复杂的电场分布的近似式。

### 3.3 周期性狭缝的衍射象

当采用梳状函数时，就能产生各种周期函数，下面是这种性质的例题。

〔例题 3.5〕如图 3.13 所示，宽度为  $a$  的狭缝以间隔  $b$ ，沿  $x$  轴周期排列着。求这周期性狭缝的夫琅和费衍射象，设此周期性狭缝的全长为  $c$ 。

〔答〕输入函数  $g(x)$ ，能由  $\Pi(x)$  和  $\text{III}(x)$  组合而成，以下式表示：

$$g(x) = \left[ \Pi\left(\frac{x}{a}\right) * \text{III}\left(\frac{x}{b}\right) \right] \cdot \Pi\left(\frac{x}{c}\right) \quad (3.22)$$

括号内表示无限连续的情况，最后的因子是把长度截取在  $c$  的范围内，式 (3.22) 的傅里叶变换为

$$G(f) = abc[(\operatorname{sinc} af) \text{III}(bf)] * \operatorname{sinc} cf \quad (3.23)$$

将式 (3.23) 分成两部分，表示在图 3.14 上。若仅仅表示括号中的部分，就如图 3.14 的左图所示，成为用  $\operatorname{sinc} af$  调制的存在周期性  $\delta$  函数所得的形式。 $\delta$  函数的周期是  $1/b$  由狭缝的周期决定。狭缝的周期变小，则  $1/b$  增大，两者成反比例关系。而且， $\operatorname{sinc} af$  的宽度也与狭缝的宽度成反比关系。右边的图是  $\operatorname{sinc} cf$  因子的图，其宽度是与整个光源的大小  $c$  成反比。

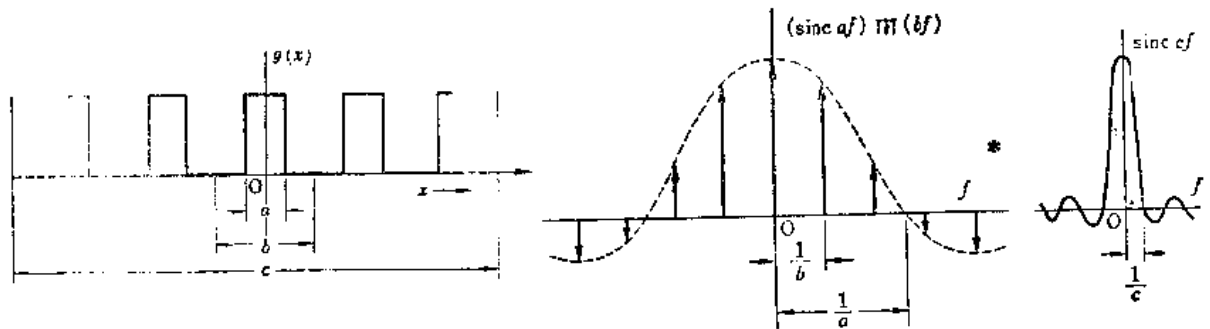


图3.13 一维周期性光源

图3.14  $\operatorname{sinc} af \cdot \text{III}(bf)$  与  $\operatorname{sinc} cf$

若将上面的两个图合而为一个图，就得到图 3.15 所示的最终结果。

现在，再将例题 3.5 的结果分析一下。有意义的是，光源面尺寸的顺序若与  $a$ ， $b$ ， $c$  对应则在傅里叶变换面上，大小的顺序为  $\operatorname{sinc} cf$  的宽度是  $1/c$ ， $\text{III}(bf)$  的周期是  $1/b$ ， $\operatorname{sinc} af$

的宽度是  $1/a$ ，其顺序刚好相反。从图 3.15 也可以看出， $c$  值大时，可以把式 (3.23) 的运算顺序改变一下，改写成以下的形式

$$G(f) = \underbrace{abc \operatorname{sinc} af}_{\text{单元因子}} \underbrace{[\Pi(bf) * \operatorname{sinc}(cf)]}_{\text{阵列因子}} \quad (3.24)$$

式 (3.24) 可以分为只与单个光源单元的形状有关的单元因子，和与光源间的周期以及周期的全长等排列方法有关的阵列因子。这样就大大简化了衍射光栅和阵列天线等的设计。若改变单个狭缝的形状，图 3.15 其屏幕面上光能分布的变化，只是改变了用虚线表示的包络线的形状，其他部分，全部没有变化。即，单元的形状和周期是可以分别加以考虑和设计的。若用一般式表示式 (3.24)，则成为

$$(\text{图形}) = (\text{单元因子}) \times (\text{阵列因子}) \quad (3.25)$$

式中 单元因子 (element factor) 相当于式 (3.24) 的第一因子。阵列因子 (array factor) 相当于第二因子。

〔例题 3.6〕 如图 3.16 所示，宽度为  $a$  的  $N$  个单元天线，沿着  $x$  轴排列着。若要把  $y = 0$  面上的辐射图形的第一旁瓣的振幅做成主瓣的  $2/\pi$ 。求单元天线之间的间隔  $b$  应该是多少？(设其中的  $N$  是相当大的数，例如 10 或 100)

〔答〕 在例题 3.5 中，已经求得单元的宽度为  $a$ ，间隔为  $b$ ，全长为  $c$  的图样，其图形示于图 3.15。现在，把此图中的一部分画在图 3.17 上。第一旁瓣的高度是随着  $1/b$  的变化而沿着包络线  $\operatorname{sinc} af$  变化的，因此在  $\operatorname{sinc} af$  的值为  $2/\pi$  的点上，求出它所具有的  $1/b$  值就可以了

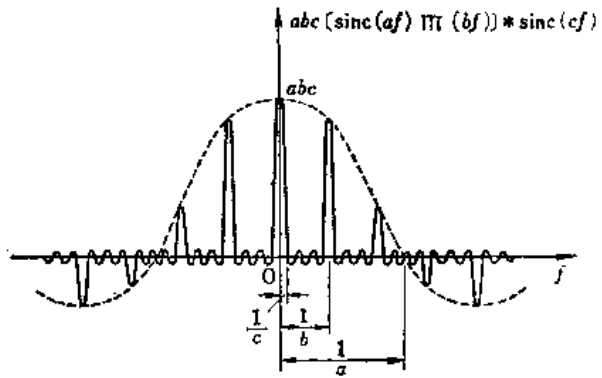


图 3.15  $abc[\operatorname{sinc}(af)\Pi(bf)] * \operatorname{sinc}(cf)$

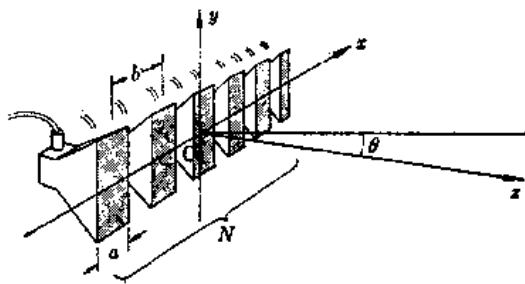


图 3.16 天线阵列

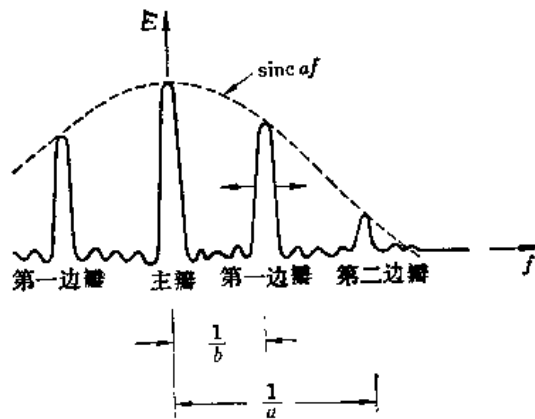


图 3.17 天线阵列的设计

$$\frac{\operatorname{sinc} \pi f}{\pi f} = \frac{2}{\pi} \quad (3.26)$$

当  $f = 1/2a$  时，能满足式 (3.26)，所以，只要把  $1/b$  等于此值就可以了，即

$$b = 2a \quad (3.27)$$



因而清楚地看出只要把间隔做成天线宽度的两倍就可以了。

### 3.4 圆孔的衍射象

〔例题3.7〕 求图 3.18 所示的半径为 1 的圆孔的夫琅和费衍射象。

〔答〕 将式(2.31)改成柱面坐标, 利用贝塞尔积分变换式(1.72), 则

$$u(l) = \frac{1}{z_i} \cdot e^{jk(z_i + l^2/2z_i)} K \cdot B\{g(r)\}_{\rho=l/\lambda z_i, \alpha=\sin\theta/\lambda} \quad (3.28)$$

由题意得

$$g(r) = \text{circ}(r) \quad (3.29)$$

利用式(1.76)的结果, 可得

$$u(l) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{j\left(kz_i + \frac{k l^2}{2z_i}\right)} \left[ \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} \right]_{\rho = \frac{l}{\lambda z_i}} \quad (3.30)$$

用图表示此振幅, 就是图 3.19。\$J\_1(\pi x)\$ 的值成为零时其值是 \$x = 1.22, 2.23, 3.24\$。所以, 形成 \$u(l) = 0\$ 的点时 \$l\$ 的值分别是 \$l = 0.61\lambda z\_i, 1.117\lambda z\_i, 1.619\lambda z\_i\$。

可以知道, 达到第一个零的直径是 \$1.22\lambda z\_i\$。若把它和边长为 2 的正方形的面光源的情况作比较, 则正方形时是 \$1.0\lambda z\_i\$, 而圆形的情况下, 只是少许加长了一些。

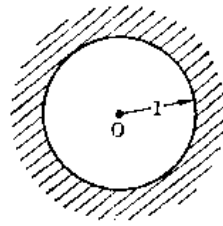


图3.18 圆形孔

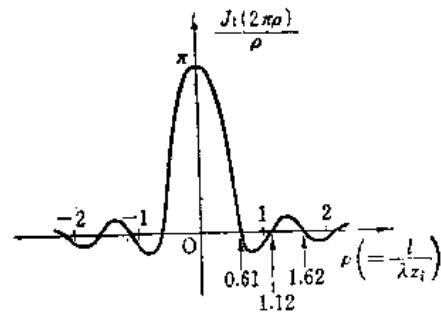


图3.19 圆形面光源的衍射象

〔例题3.8〕 在光学系统中, 垂直光轴的断面上的

光能分布往往成为高斯分布 \$e^{-a^2 r^2}\$。现在, 证明一下, 当光轴和 \$z\$ 轴一致时, \$z = 0\$ 的光分布若为高斯分布, 则 \$z = z\_i\$ 断面上的光能分布也成为高斯分布。

〔答〕 为了利用式(3.28), 首先计算 \$G(\rho)\$ 之值, 即首先求下式

$$G(\rho) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-a^2 r^2} J_0(2\pi r \rho) dr \quad (3.31)$$

利用下面的贝塞尔积分公式

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x J_0(bx) dx = \frac{1}{2a^2} e^{-b^2/4a^2} \quad (3.32)$$

则式(3.31)就成为如下的形式

$$G(\rho) = \frac{\pi}{a^2} e^{-(\pi^2/a^2)\rho^2}$$

根据上式, 把 \$\rho = l/\lambda z\_i\$ 代入, 可得 \$z = z\_i\$ 的光能分布 \$u(l)\$

$$u(l) = \frac{\pi}{ja^2 \lambda z_i} e^{jk(z_i + l^2/2z_i)} \cdot e^{-(\pi/\lambda a z_i)^2 l^2} \quad (3.33)$$

显然, 振幅分布是高斯分布。

实际上,能进行菲涅耳-贝塞尔积分变换的积分函数,是非常有限的。仅仅在包括上述高斯分布在内的有限情况下,积分是可能的。

### 3.5 一维菲涅耳带板

当平行光线照射在具有图 3.20 所示的透过率分布的掩模上时,掩模有聚光作用即起透镜那样的作用。

菲涅耳带板,不仅在可见光,而且在红外线, X 线, γ 线等波长范围内不能用玻璃制成透镜使用时,仍能发挥它的作用。现在,求一下菲涅耳带板的透过率分布的表示式,然后,利用这个表示式,求菲涅耳衍射图。

菲涅耳带板的透过率分布函数,是如图 3.20(a) 所示的与  $x_0^2$  有关的周期函数(为了使以后计算方便,把常数  $\sqrt{\frac{2}{\lambda p}}$  加到  $x_0$  上),因此,若作如下的变数变换

$$X = \frac{2}{\lambda p} x_0^2 \quad (3.34)$$

就成为图 3.20(b) 所示的周期函数。下面,为了把这周期函数展开成傅里叶级数,计算级数的系数  $a_n$ , 可得

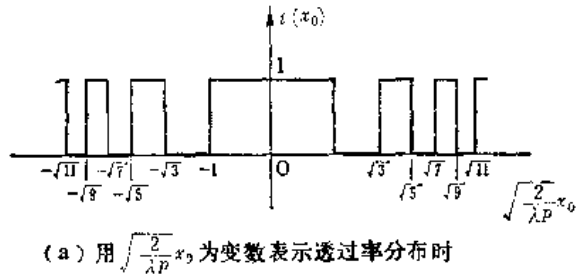
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 t(X) e^{j2\pi n \frac{X}{4}} dX \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \cos n \frac{\pi}{2} X \cdot dX + \frac{1}{4} j \int_{-1}^1 \sin n \frac{\pi}{2} X \cdot dX \\ a_n &= \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} \end{aligned} \quad (3.35)$$

利用这结果,把  $t(x)$  表示成傅里叶级数,可得

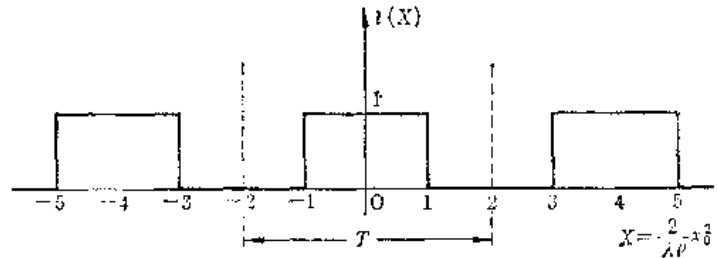
$$t(X) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} e^{-jn(\pi/2)X} \quad (3.36)$$

利用式(3.34),把变数还原,可得

$$t(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} e^{-jn(\pi/\lambda p)x_0^2} \quad (3.37)$$



(a) 用  $\sqrt{\frac{2}{\lambda p}} x_0$  为变数表示透过率分布时



(b) 用  $X = \frac{2}{\lambda p} x_0^2$  变数变换后表示透过率分布时

图3.20 一维菲涅耳带板的透过率分布函数

三  
二  
一

这就是一维菲涅耳带板的透过率分布函数。

下面，利用菲涅耳近似，求平行光线垂直射入菲涅耳带板的情况下的衍射象。如图3.21所示，将菲涅耳带板放置在  $z = 0$  处，将屏幕放置在  $z = z_i$  处，把式(3.37)代入式(2.60)，则屏幕面上的振幅分布  $u(x_i, y_i)$  为

$$u(x_i, z_i) = \frac{1}{\sqrt{z_i \lambda}} \cdot e^{j(kz_i + kx_i^2/2z_i - 3\pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\pi/\lambda)(1/z_i - n/p)x_0^2 - i2\pi f x_0} dx_0 \Big|_{f = x_i/\lambda z_i} \quad (3.38)$$

上式中是假定菲涅耳带板的大小为无穷大，式(3.38)是  $n$  的级数，特别是  $n$  满足下式时

$$\frac{1}{z_i} - \frac{n}{p} = 0 \quad (3.39)$$

其积分值为

$$\delta(x_i/\lambda z_i) \quad (3.40)$$

形成光的峰值。此外，菲涅耳带板的长度是有限的。当其值为  $a$  时， $t(x_0)$  就成为  $t(x_0)\Pi(x_0/a)$ 。所以，积分值式(3.40)就变成  $a \operatorname{sinc}(ax_i/\lambda z_i)$ 。

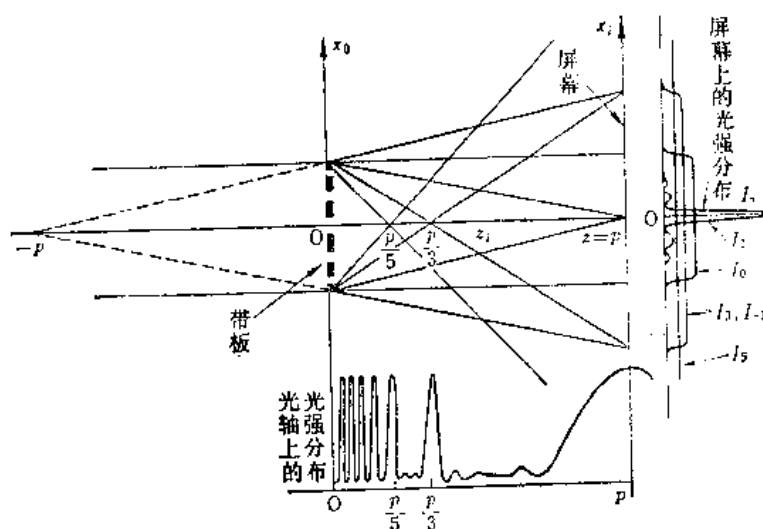


图3.21 通过菲涅耳带板的光分布

式(3.39)中，当  $n = 1$  时，表示会聚在  $z_i = p$  处。把  $p$  称为主焦距。式(3.38)表示会聚在除  $p$  点以外的，满足式(3.39)的无数点上，这些焦点的位置  $p_n$  是  $-p, -p/3, -p/5, \dots, p/n, 0, p/n, \dots, p/5, p/3, p$ 。没有  $n$  的偶数项是因为式(3.38)中的  $\sin(n\pi/2)$  是零的缘故。这些项的聚光状态表示在图3.21的下图上。此外，图3.21的右图表示这些项分别对放置在主焦面上的屏幕面提供的光强度。屏幕上的光能分布情况，完全由这些项的振幅的总和来决定。正好在焦点上的项（图中是  $n = 1$  的项）的光强度，比其他项高得多。若把屏幕移到  $p/3$  的位置上，则  $n = 3$  这项所决定的光强度比其他项高得多。

下面，更具体地计算一下主焦面上的光能分布，应用式(2.38)的结果，则式(3.38)的积分为

$$u(x_i, p) = \frac{1}{\sqrt{p\lambda}} \cdot e^{j(kp + kx_i^2/2p - 3\pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} \sqrt{\frac{p\lambda}{1-n}} e^{i\pi[1/4 - 1/(1-n) \cdot x_i^2/\lambda p]} \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{j\sqrt{p\lambda}} \cdot e^{ikp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{\pi n} \sqrt{\frac{p\lambda}{1-n}} e^{jkx_i^2/2[(n-1)/np]} \quad (3.42)$$

把式(3.42)的最后因子和下式作比较

$$A e^{i k x^2 / 2d} \quad (3.43)$$

上式为将一维点光源放置在离屏幕距离为  $d$  的位置上时, 屏幕面上的光能分布的表示式。

通过比较看出, 式(3.42)是将点光源放置在  $(n-1)/n \cdot p$  处时的表示式。例如, 式(3.42)的  $n=3, n=5$  的成分可以分别看成是离屏幕  $(2/3)p, (4/5)p$  处的, 即离带板  $p/3, p/5$  处的光源的成分。其结果如图 3.21 所示。

把以上内容归纳一下, 用菲涅耳带板聚光时, 不仅对  $n=1$  的成分, 而且对于  $n=0, \pm 3, \pm 5, \pm (2n-1)$  的成分都是有用的。所以不能像透镜那样, 得到清晰的聚光作用。而且, 必须注意, 焦距是随波长而变化的。

### 3.6 二维菲涅耳带板

二维菲涅耳带板是由同心圆的环带组成的。环带宽度的比例, 和一维情况下完全相同。图 3.22 就表示这种带板。菲涅耳带板的同心圆的半径是

$$R_n = \sqrt{\frac{\lambda p}{2} (2n-1)} \quad (3.44)$$

下面, 计算一下主焦距  $p$  的菲涅耳带板的衍射光的分布。所有的公式推导和一维时的公式推导是完全一样的。首先, 计算二维菲涅耳带板的透过率分布函数。由于做成和一维菲涅耳带板的透过率分布函数相同的形式, 所以可以原封不动地利用式(3.37), 得

$$t(r) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{\pi n} \cdot e^{-i n (\pi/\lambda p) r^2} \quad (3.45)$$



图3.22 二维菲涅耳带板

使平行光线垂直地入射到放置在  $z=0$  处的菲涅耳带板上, 求菲涅耳区域内  $z=z_i$  处的屏幕上的衍射象, 用柱面坐标表示菲涅耳近似式则得

$$u(r) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{i k (z_i + i^2/2z_i)} 2\pi \int_0^{\infty} r P(r) t(r) e^{i k r^2/2z_i} J_0(2\pi \rho r) dr \Big|_{\rho=l/\lambda z_i} \quad (3.46)$$

式中的  $P(r)$  是瞳函数, 是在光瞳面内为 1, 在光瞳面外为零的函数。把式(3.45)代入式(3.46), 则得

$$u(r) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{i k (z_i + i^2/2z_i)} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} \int_0^{\infty} r P(r) e^{i (\pi/\lambda) (1/z_i - n/p) \cdot r^2} J_0(2\pi \rho r) dr \Big|_{\rho=l/\lambda z_i} \quad (3.47)$$

式(3.47)中当满足下式

$$\frac{1}{z_i} - \frac{n}{p} = 0 \quad (3.48)$$

的项的积分和前节的情况相同, 比别的项的积分大得多, 所以, 在第  $n$  焦面  $z_i = p_n$  处的光分

布，只剩下这项，可近似写成为

$$u(r, p_n) = \frac{1}{j\lambda p_n} \cdot e^{jk(p_n + (x^2 + y^2)/2p_n)} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} \mathcal{F}\{P(r)\}_{r=t/\lambda p_n} \quad (3.49)$$

可以看出，焦面上的光能分布，是瞳函数的贝塞尔变换。

瞳函数，根据在光瞳面内还是在光瞳面外，其值为1或0只取其中的一个，再用一般函数 $\phi(r)$ 置换 $t(r)$ ，就成为用 $\phi(r)$ 调制的带板，特别把它称为调制带板(MZP)。MZP焦面上的分布，可以通过取 $\phi(r)$ 的汉克尔变换而得到，如习题中那样，通过适当选择MZP的 $\phi(r)$ ，能够在焦面上产生所要求的图样。若将大功率的激光和MZP组合起来就能按照图样切断金属板而成为一种机床。

如第一章所述，汉克尔变换和傅里叶变换的差别，仅仅是把相同的运算，用直角坐标表示，还是用柱面坐标表示之差。所以，假如MZP的设计图用直角坐标计算比较容易的话，只要用下式代替式(3.49)就可以了

$$u(x_i, y_i, p_n) = \frac{1}{j\lambda p_n} \cdot e^{jk[p_n + (x_i^2 + y_i^2)/2p_n]} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} \mathcal{F}\{\phi(x, y)\}_{x_i=x_i/\lambda p_n, y_i=y_i/\lambda p_n} \quad (3.50)$$

菲涅耳带板存在着焦距随波长变化，以及，在焦点外的点也有会聚光存在的缺点。但是，它能使用于可见光波以外的波段，应用范围很广。

## 习 题

习题3.1 具有图3.23所示的锯齿形表面的反射式衍射光栅称为红外光栅(echelette)，当使用这种衍射光栅的光谱峰值时，求衍射光栅效率最高时的齿高 $h$ 。设波长为0.6微米(1微米是千分之一毫米)，锯齿的周期为0.7微米。

习题3.2 图3.24表示应用光弹性效应的光偏转器。由于液体中的超声波的声压，使液体的折射率在 $x$ 方向发生周期性的变化，形成一种衍射光栅。通过改变超声波的频率，控制衍射光栅的空间频率。现在假定平行光线从光偏转器的侧面入射，这时透过光的位相调制是

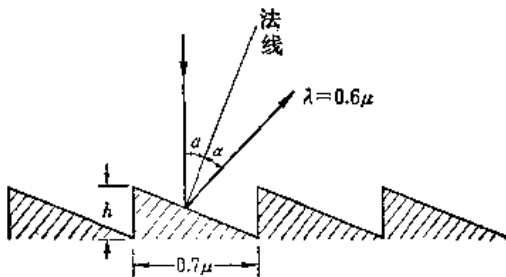


图3.23 锯齿形衍射光栅

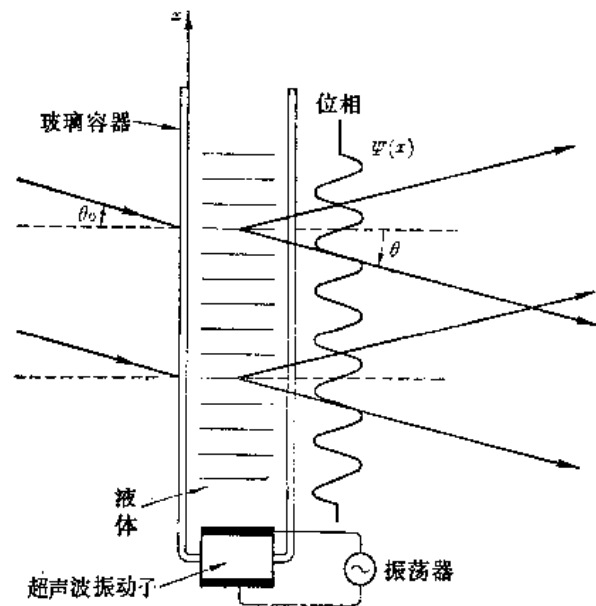


图3.24 超声波光偏转器  
(Debye-Sears spatial light modulator)

$$\phi(x) = \phi_0 + \phi_m \sin \frac{2\pi}{\lambda_a} x \quad (3.51)$$

证明：以入射角  $\theta_0$  入射到容器侧面的人射光所形成的衍射光的峰值，其方向角可用下式表示：

$$\sin \theta = \sin \theta_0 - n \frac{\lambda}{\lambda_a} \quad (3.52)$$

式中  $\lambda_0$  是液体中的声波波长， $\lambda$  是入射光的波长， $n$  是整数。角度的方向，如图 3.24 所示，从法线顺时针方向转动为正。

习题 3.3 在习题 3.2 中，通过增减入射角，使  $\theta_0 = -\theta$  时，式(3.52) 满足布喇格条件式 (Bragg's condition)  $2 \sin \theta_0 = n \lambda / \lambda_0$ ，当满足这条件时，偏转光线的光强度变得特别大，说明其理由。

习题 3.4 图 3.25 所示的调制的带板(MZP)上，当用激光入射时，求出在带板焦点上的图样，设 MZP 的大小是有限的。

[注] 有一种加工方法，就是把很强的激光通过 MZP 照射出去，在金属板上加工出预先设计好的孔，图 3.25 就是用在这种加工方法中的 MZP 的一个实例。

习题 3.5 在本章中使用了不透明的带状光源来实现透过函数  $T(x_0)$ ，现在，利用透过函数按

$$T(x_0) = 1 + \cos \left( k \frac{x^2}{2f} \right) \quad (3.53)$$

变化的半透明掩模，也能形成带板。计算这带板的焦距。

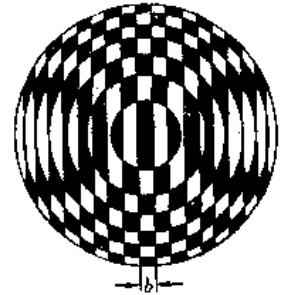


图 3.25 加工用 MZP

## 文 献

- (1) R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, "The Feynman lectures on physics," Addison-Wesley Publishing Comp., Reading Massachusetts, 1963.
- (2) J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics," McGraw Hill, New York, 1968.
- (3) R. Bracewell, "The Fourier transform and its applications," McGraw Hill Inc., New York, 1965.
- (4) A. Papoulis, "Systems and transforms with applications in Optics," McGraw Hill Inc., New York, 1968.

## 第四章 几何光学

对作为电磁波的光波现象进行分析时，必须解麦克斯韦方程式。但是，在实际问题中不作任何近似的规定，而求解的情况是非常有限的。

根据近似的方法，可把光学分为本章讲述的几何光学和第二章讲述的波动光学两大类。前者的近似式，把着眼点放在光路的决定上，在确定不均匀介质中的光路和设计透镜等方面发挥着很大的作用。后者的近似式，主要着眼于干涉和衍射的说明，对决定微细的光能分布有效，用于决定分辨率等。

### 4.1 不均匀介质中波动方程式的几何光学近似式

设光波的电场为  $\mathbf{E}(x, y, z)$ ，因为光波是电磁波，故必须满足波动方程式，即

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}(x, y, z) = 0 \quad (4.1)$$

$\mathbf{E}(x, y, z)$  的分量  $E_x, E_y, E_z$  是必须分别满足式(4.1)的。但是，因为各分量是呈现同一形式的，所以可用一个标量函数  $u(x, y, z)$  来代表它，求下式的解

$$(\nabla^2 + k^2)u(x, y, z) = 0 \quad (4.2)$$

当  $k^2$  是  $x, y, z$  的函数时，式(4.2)的解一般成为非常复杂的式子。在此，假定  $k^2$  是  $x, y, z$  的函数时， $u(x, y, z)$  的解是下面的形式

$$u(x, y, z) = A(x, y, z) e^{j(k_0 L(x, y, z) - \omega t)} \quad (4.3)$$

式(4.3)是否是正确的解，可由式(4.3)是否已满足式(4.2)来决定。这时， $A(x, y, z)$ ， $L(x, y, z)$  是未知函数。下面决定  $A(x, y, z)$  和  $L(x, y, z)$  以便使式(4.3)满足式(4.2)。 $k_0$  是真空中传播常数。

首先，把式(4.3)代入式(4.2)，计算一个变数的微分值，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} + j k_0 A \frac{\partial L}{\partial x} \right) e^{j(k_0 L - \omega t)} \quad (4.4)$$

把再一次微分所得的结果和  $k^2 u$  相加，就得到式(4.5)。同时，对变数  $y, z$  的运算，也可得到和式(4.5)相同的形式。所以，使其中的  $k^2 = n^2 k_0^2$ ，于是就成为式(4.6)。若把  $1/k_0^2$  乘在等式的两边，就成为式(4.7)。式(4.7)中的  $|\nabla L|^2$  是矢量  $\nabla L$  的  $i, j, k$  分量的平方和

$$k^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{j(k_0 L - \omega t)} \left[ k_0^2 \left( n^2 - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 \right) A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + j k_0 A \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + j 2 k_0 \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} \right] = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k^2 u + \nabla^2 u = e^{j(k_0 L - \omega t)} [k_0^2 (n^2 - |\nabla L|^2) A + \nabla^2 A + j k_0 A \nabla^2 L + j 2 k_0 (\nabla A) \cdot (\nabla L)] = 0 & & & & & & \end{array} \quad (4.6)$$

$$(n^2 - |\nabla L|^2) A + \frac{1}{k_0^2} \nabla^2 A + \frac{j}{k_0} [A \nabla^2 L + 2(\nabla A) \cdot (\nabla L)] = 0 \quad (4.7)$$

在短波长的情况下即大的  $k_0$  值情况, 式(4.7)的第二项和第三项与第一项相比能够忽略不计。在  $k_0 \rightarrow \infty$  的极限情况下, 式(4.7)成为

$$|\nabla L|^2 = n^2 \quad (4.8)$$

若用直角坐标表示, 就成为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad (4.9)$$

用解式(4.9)代替解波动方程式而求出  $L$  值, 再把它代入式(4.3)能求出  $u$  值。但是, 为了使式(4.7)的第二项和第三项与第一项相比能够忽略不计, 不仅  $k_0$  的值要大, 而且  $\nabla^2 L$ ,  $\nabla^2 A$ ,  $\nabla A$  的值必须小。也就是满足了  $L$ ,  $A$  值的变化小这个条件。 $L$  值可利用式(4.8)求得:

$$L = \int_{l_0} |\nabla L| ds = \int_{l_0} n ds \quad (4.10)$$

式中  $l_0$  是沿矢量  $\nabla L$  方向的线积分的积分路径。只有沿  $\nabla L$  的方向进行积分时, 式(4.10)才是正确的。

下面求  $A(x, y, z)$  的值, 当  $1/k_0^2$  项近似于零时, 根据式(4.8), 则式(4.7)就成为

$$A\nabla^2 L + 2(\nabla A) \cdot (\nabla L) = 0 \quad (4.11)$$

实际上, 从式(4.11)的解求  $A$  值, 除在习题中那种特殊情况以外, 是很困难的。因此往往使式(4.9)中  $L$  的解具有几何光学的重要性。

因此,  $u$  的解可由式(4.3)和式(4.10)得到

$$u(x, y, z) = A(x, y, z) e^{i(k_0 \int_{l_0} n ds - \omega t)} \quad (4.12)$$

从形式上看, 似乎只要给定  $n$  值, 即使不解微分方程式(4.8), 也能得到式(4.12)的结果。可是, 线积分的积分路径  $l_0$  是不知道的, 必须通过解微分方程式(4.8), 求出  $L$  值, 再利用这结果求出  $\Delta L$  后, 才能得到  $l_0$ 。

式(4.8)称为程函方程式(Eikonal equation),  $L$  本身称为程函或光程。程函是希腊语, 其意义是“象”。由于折射率为  $n$  的介质中光速为  $v = c/n$ , 所以, 在两点间行进所需的时间  $T$  是下面的线积分

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{n}{c} ds$$

由上式和式(4.10)可得  $L = cT$ , 即程函是光在折射率为  $n$  的介质中与其传播的时间  $T$  相同的时间内, 光在真空中传播的距离。

下面, 研究一下波面的行进情况。现在, 只着眼于式(4.3)的位相是零的波面的运动情况, 这波面在满足

$$k_0 L(x, y, z) = \omega t$$

的情况下前进。若时间  $t$  增加, 则  $L(x, y, z)$  的值也增加。各时刻的  $L(x, y, z)$  的值为

$$L(x, y, z) = \frac{\omega}{k_0} t \quad (4.13)$$

若用图说明式(4.13), 则成为图4.1所示的状态。随着时间的推移, 形成  $L(x, y, z) = \text{定值}$  的一组波面群。



对应这些面的法线方向是  $\nabla L(x, y, z)$ , 这是初等解析几何的教学内容。 $\nabla L$  的方向称为波面法线。式 (4.10) 的积分路径  $l_0$  就根据它求出。

〔例题4.1〕 有一个折射率仅在  $z$  轴方向有变化, 用  $n(z)$  表示的不均匀介质, 求在这介质中传播的光的表示式。

〔答〕 用变数分离法来解程函的式 (4.9)。设  $L(x, y, z)$  能够表示成只与  $x$  有关的函数  $f(x)$ , 只与  $y$  有关的函数  $g(y)$  只与  $z$  有关的函数  $h(z)$  的和, 即

$$L(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z) \quad (4.14)$$

这假定的答案是否正确, 只要把式 (4.14) 代入到式 (4.9) 就可知道。代入后得

$$[f'(x)]^2 + [g'(y)]^2 + [h'(z)]^2 - [n(z)]^2 = 0 \quad (4.15)$$

式 (4.15) 的第一项是仅与  $x$  有关的函数, 而第二项和第三项分别是与  $y, z$  有关的函数。但无论独立变数  $x, y, z$  怎样去组合, 为了使式 (4.15) 成立, 各项都必须是常数, 即

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= a \\ g'(y) &= b \\ [h'(z)]^2 - [n(z)]^2 &= c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

式中

将式 (4.16) 积分得

$$f(x) = ax + m_1 \quad (4.17)$$

$$g(y) = by + m_2 \quad (4.18)$$

$$h(z) = \int_m^z \sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)} dz \quad (4.19)$$

代入式 (4.14) 后可得结果如下

$$L(x, y, z) = ax + by + \int_m^z \sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)} dz \quad (4.20)$$

式 (4.17)、式 (4.18) 中的常数  $m_1, m_2$  是包含在式 (4.20) 的积分下限  $m$  中。常数  $a, b$  之值由边界条件, 即由发射点和发射角决定, 再把式 (4.20) 代入式 (4.3), 可得

$$u(x, y, z) = A e^{jk_0(ax + by + \int_m^z \sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)} dz) - j\omega t} \quad (4.21)$$

$A$  值留待习题中去求。

## 4.2 光的行进方向

本节探讨一下光的行进方向 (direction of ray)。

光束的前进方向是波面法线的方向, 也就是  $\nabla L$  的方向。所以, 沿光束的单位矢量  $\hat{s}$  为

$$\hat{s} = \frac{\nabla L}{|\nabla L|} = \frac{\nabla L}{n} \quad (4.22)$$

式中右边的关系式是利用了式 (4.8)。

为了用坐标表示光束的路径, 把  $\hat{s}$  表示成位置矢量的变化更为方便。所以, 要求出  $\hat{s}$  和

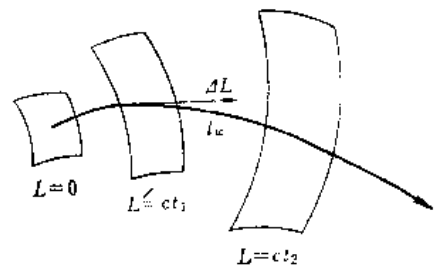


图4.1  $L(x, y, z)$  等于一定的波面群

位置矢量的关系。在图 4.2 中, 若设曲线上任意点  $P(x, y, z)$  的位置矢量为  $\mathbf{r}$ , 则沿曲线移动距离  $ds$  时, 位置矢量的变化量是  $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{s}}ds$ , 所以

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{i} \frac{dx}{ds} + \mathbf{j} \frac{dy}{ds} + \mathbf{k} \frac{dz}{ds} \quad (4.23)$$

将式 (4.23) 代入式 (4.22) 其结果如下

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla L \quad (4.24)$$

式 (4.24) 是决定光束方向的微分方程式。下面是利用式 (4.24) 求光的路径的例题。

〔例题 4.2〕 和例题 4.1 相同, 是求在  $n = n(z)$  介质中, 如图 4.3 所示, 从点  $(0, c_0, 0)$  发出的与  $x$  轴,  $z$  轴分别成  $\varphi$ ,  $\theta_0$  角的光束的路径。

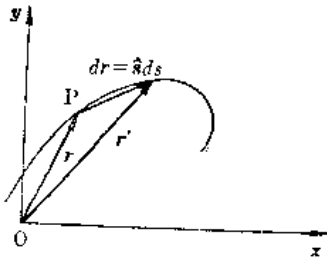


图 4.2 曲线的切线的单位矢量

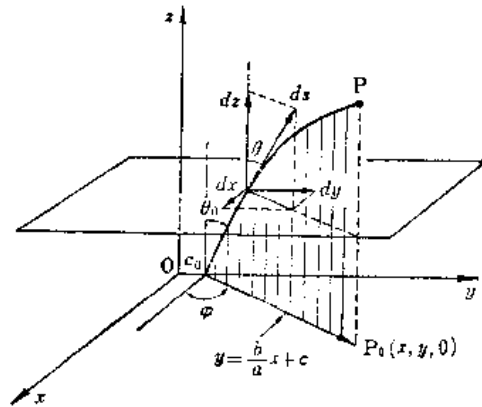


图 4.3 在折射率为  $n = n(z)$  的介质中的光线路径

〔答〕 利用例题 4.1 的结果, 将式 (4.20) 代入式 (4.24) 得

$$n(z) \frac{dx}{ds} = a \quad (4.25)$$

$$n(z) \frac{dy}{ds} = b \quad (4.26)$$

$$n(z) \frac{dz}{ds} = \sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)} \quad (4.27)$$

由式 (4.25), (4.26) 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore y = \frac{b}{a}x + c \quad (4.28)$$

式 (4.28) 是表示垂直于  $xy$  面的平面公式, 不管入射角和折射率分布函数  $n(z)$  怎么样, 光线不会离开这平面。光束在  $xy$  面上的投影就是图 4.3 上以  $c_0P_0$  表示的直线。此直线通过点  $(0, c_0, 0)$ , 斜率为  $\tan\varphi$ , 所以, 式 (4.28) 中的常数值为

$$\frac{b}{a} = \tan\varphi \quad c = c_0 \quad (4.29)$$

由式 (4.25), (4.27) 得

$$x = \int^z \frac{a dz}{\sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)}} \quad (4.30)$$

由式(4.26), (4.27)得

$$y = \int^z \frac{b dz}{\sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)}} \quad (4.31)$$

式(4.30)和(4.31)是表示光束路径的公式。由于系数  $a$ ,  $b$  没有定, 所以, 下面求这些系数, 设  $z$  轴和光束的夹角为  $\theta$ , 由图 4.3 得

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{ds} \quad (4.32)$$

将式(4.25)和(4.26)代入式(4.32), 得

$$n(z)\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.33)$$

当折射率沿  $z$  轴方向不变化时, 得到下面的重要结果

$$n(z)\sin\theta = \text{定值} \quad (4.34)$$

$z = 0$  的折射率是  $n_0$ , 在起始点上和  $z$  轴的夹角是  $\theta_0$ , 所以从式(4.33)可得

$$n_0\sin\theta_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.35)$$

将它代入式(4.30)和(4.31), 则

$$x = \int^z \frac{a dz}{\sqrt{[n(z)]^2 - n_0^2\sin^2\theta_0}} \quad (4.36)$$

$$y = \int^z \frac{b dz}{\sqrt{[n(z)]^2 - n_0^2\sin^2\theta_0}} \quad (4.37)$$

式(4.36)和(4.37)中的  $a$ ,  $b$  值, 可由式(4.29)和(4.35)决定。

下面, 对上例的结果再稍许详细地讨论一下。首先, 若式(4.36)和(4.37)的平方根中为负值, 则  $x$  值成为虚数, 光线不传播。这时光线在负值的点上产生全反射。所以, 下式为不等号时, 光线就向前传播, 在等号的地方, 光线就全反射。

$$n(z) \geq n_0\sin\theta_0 \quad (4.38)$$

为了更详细的说明, 现在考虑一下如图4.4所示的  $n(z)$  是随  $z$  的增加而减少的情况, 入射光线的高度  $z_0$  只有满足

$$n(z_0) = n_0\sin\theta_0 \quad (4.39)$$

的高度以下, 才向前传播。在这点上产生全反射, 全反射的高度  $z_0$  是入射角  $\theta_0$  的函数。式(4.39)还表明,  $\theta_0$  越小, 全反射点越高, 若在  $z$  的全部范围内都能满足下式

$$n(z) > n_0\sin\theta_0$$

则无论怎样的入射角, 都不产生全反射。此外, 与上述情况相反,  $n(z)$  的值是随  $z$  的增加而增加的函数时, 显然不会产生全反射。

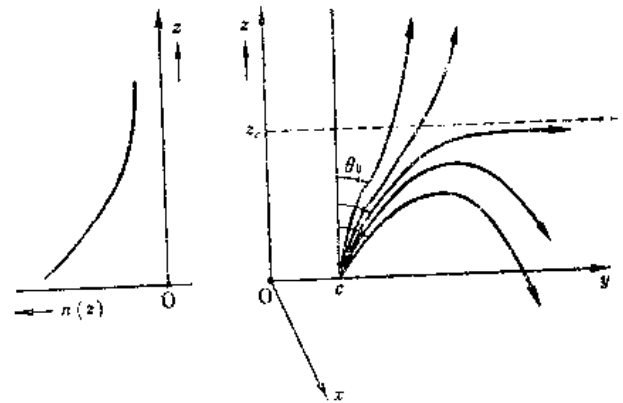


图4.4 折射率为  $n = n(z)$  的介质中光线的路径

### 4.3 折射率变化与光路弯曲的关系

当光进入折射率不均匀的介质中时, 其路径将产生弯曲, 这是众所周知的现象。现在,

求一下用  $\nabla n(x, y, z)$  表示折射率不均匀性时, 光线的弯曲和  $\nabla n$  (把  $\nabla n(x, y, z)$  写成  $\nabla n$ ) 的关系式, 若将式 (4.24) 写成其分量, 得

$$\left. \begin{aligned} n \frac{dx}{ds} &= L_x \\ n \frac{dy}{ds} &= L_y \\ n \frac{dz}{ds} &= L_z \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

式中  $L_x = \frac{\partial L}{\partial x}, L_y = \frac{\partial L}{\partial y}, L_z = \frac{\partial L}{\partial z}$

下面, 将式 (4.40) 的第一式进行  $s$  全微分, 因为  $x, y, z$  是  $s$  的函数, 所以

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} n \frac{dx}{ds} &= \frac{dL_x}{ds} = \left( \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} \right) L_x \\ &= \frac{dx}{ds} L_{xx} + \frac{dy}{ds} L_{xy} + \frac{dz}{ds} L_{xz} \end{aligned} \quad (4.41)$$

将式 (4.40) 代入式 (4.41), 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} n \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{n} [L_x L_{xx} + L_y L_{xy} + L_z L_{xz}] \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

利用程函的式 (4.9), 得

$$\frac{d}{ds} n \frac{dx}{ds} = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} n^2 = \frac{\partial n}{\partial x}$$

对于  $y, z$  分量, 也可用同样方法, 归纳其结果可得到下式

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (4.43)$$

式 (4.43) 的右边表示折射率的变化量, 因为  $d\mathbf{r}/ds$  是沿路径的单位矢量  $\hat{\mathbf{s}}$ , 所以, 左边表示沿路径的单位矢量的变化, 即路径的弯曲量。

路径的弯曲量, 用曲线的曲率半径  $\rho$  表示, 在图 4.2 中, 表示了  $d\mathbf{r}/ds = \hat{\mathbf{s}}$  的情况, 把  $\hat{\mathbf{s}}$  再微分一下, 就成为

$$\frac{d\hat{\mathbf{s}}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{N}}}{\rho} \quad (4.44)$$

式中的  $\hat{\mathbf{N}}$ , 如图 4.5 所示, 是从 P 点作法线的单位矢量。

若将沿曲线的微小线段的长度  $ds$  看成曲线半径  $\rho$  的微小部分, 则从图 4.5 的左图, 可看出如下关系

$$ds = \rho d\theta \quad (4.45)$$

光线在曲线上前进  $ds$  距离时, 曲线的切线方向的单位矢量  $\hat{\mathbf{s}}$  的大小是不变的。可是, 其

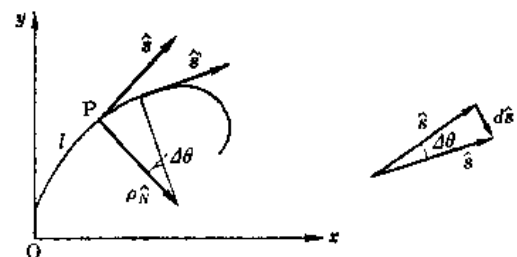


图4.5 弗伦特-塞特 (Frenet-Serret) 定理的证明

方向变成了  $\hat{s}'$ 。设其变化量为  $d\hat{s}$ 。 $\hat{s}$ ,  $\hat{s}'$  和  $d\hat{s}$  的关系 可以用图 4.5 的右图表示, 因为  $|\hat{s}| = 1$  所以

$$\begin{aligned} |d\hat{s}| &= d\theta \\ \hat{s}' \cdot \hat{s}' &= 1 = (\hat{s} + d\hat{s}) \cdot (\hat{s} + d\hat{s}) = |\hat{s}|^2 + 2\hat{s} \cdot d\hat{s} + |d\hat{s}|^2 \\ &= 1 + 2\hat{s} \cdot d\hat{s} + |d\hat{s}|^2 \end{aligned}$$

当  $|d\hat{s}|^2$  的值比 1 小得多时

$$\hat{s} \cdot d\hat{s} = 0$$

可以看出,  $d\hat{s}$  和  $\hat{s}$  正交且和  $\hat{N}$  是同方向, 即,  $d\hat{s}$  是长度为  $|d\hat{s}|$ , 方向为  $\hat{N}$  的矢量

$$d\hat{s} = \hat{N} |d\hat{s}| = \hat{N} d\theta \quad (4.46)$$

将式 (4.46) 代入式 (4.45), 则

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{\hat{N}}{\rho} \quad (4.47)$$

式 (4.47) 称为弗伦特-塞特 (Frenet-Serret) 定理。在此必须注意,  $ds$  和  $|d\hat{s}|$  是全然不同的量。前者是沿曲线的长度, 后者是单位矢量变化量的大小。

再把式 (4.43) 进行微分, 则

$$\frac{dn}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + n \frac{d\hat{s}}{ds} = \nabla n \quad (4.48)$$

利用式 (4.23) 和弗伦特-塞特定理, 得

$$\frac{dn}{ds} \hat{s} + n \hat{N} \frac{1}{\rho} = \nabla n \quad (4.49)$$

把  $\hat{N}$  乘到式 (4.49) 的两边, 因为  $\hat{N}$  和  $\hat{s}$  是正交的, 所以式 (4.49) 的第一项为零, 得到最终结果如下

$$n \frac{1}{\rho} = \hat{N} \cdot \nabla n \quad (4.50)$$

根据定义, 曲率半径  $\rho$  恒为正值,  $n$  值也恒为正值, 所以式 (4.50) 左边的值也恒为正值。因此, 右边也必定是正值, 其结果光束的路径总是向着  $n$  值增加的方向弯曲着前进 (若弯向相反方向,  $\hat{N} \cdot \nabla n$  值为负值), 这一结果对复杂光学系统的解析和设计方面极为有用。

#### 4.4 光线在球对称的不均匀介质中的传播

本节分析一下光在折射率  $n(r)$  仅仅是半径函数的介质, 即折射率为球对称介质中的传播路径。

这里分析一下图 4.6 所示的, 把球的对称中心取为原点  $O$ , 光线从  $P$  点, 沿  $\hat{s}$  方向入射的情况。设  $P$  点的位置矢量为  $\mathbf{r}$ 。

先定义一个特殊矢量  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times (n\hat{s}) \quad (4.51)$$

$\mathbf{K}$  是垂直  $\mathbf{r}$  和  $\hat{s}$  形成的平面的矢量。下面, 把  $\mathbf{K}$  沿着路径微分得:

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \frac{d}{ds} (\mathbf{r} \times (n\hat{s})) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times (n\hat{s}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{ds} (n\hat{s}) \quad (4.52)$$

由式(4.23), (4.43)得

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = n\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{r} \times \nabla n \quad (4.53)$$

若  $n$  仅仅是  $r$  的函数, 则式(4.53)的右边第二项为

$$\nabla n(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{dn(r)}{dr} \quad (4.54)$$

式中  $\hat{\mathbf{r}}$  是半径方向的单位矢量。

此外, 式(4.53)右边第一项必然是零, 所以

$$\frac{d\mathbf{K}}{ds} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} \frac{dn(r)}{dr} = 0 \quad (4.55)$$

结果是  $\mathbf{K}$  对  $s$  的微分为零,  $\mathbf{K}$  值在光的路径中是定值。

设如图 4.6 所示, 光从  $P$  点前进到  $P'$  点时,  $\mathbf{r}$  变成了  $\mathbf{r}'$ ,  $\hat{\mathbf{s}}$  变成了  $\hat{\mathbf{s}}'$ , 若考虑  $P'$  点的矢量积  $\mathbf{K}' = \mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{s}}'$ , 则根据式(4.55)的条件,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}' = \text{定值}$ 。所以  $\mathbf{r}'$  和  $\hat{\mathbf{s}}'$  也必定在  $\mathbf{r}$  和  $\hat{\mathbf{s}}$  形成的平面内, 而且,  $\mathbf{r}$  和  $\hat{\mathbf{s}}$  形成的面是包含原点的面。所以  $\hat{\mathbf{s}}'$  也同样在包含原点的平面内。换言之, 当折射率是球对称时, 光无论从那一方向入射, 光线必定在包含原点的平面内而无例外。也就是说, 无论使光从哪个方向入射, 都无法使光通过图 4.7 所示的路径。

下面, 把光的路径实际计算一下, 若用球坐标表示  $\nabla L$

$$\nabla L = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial L}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial L}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (4.56)$$

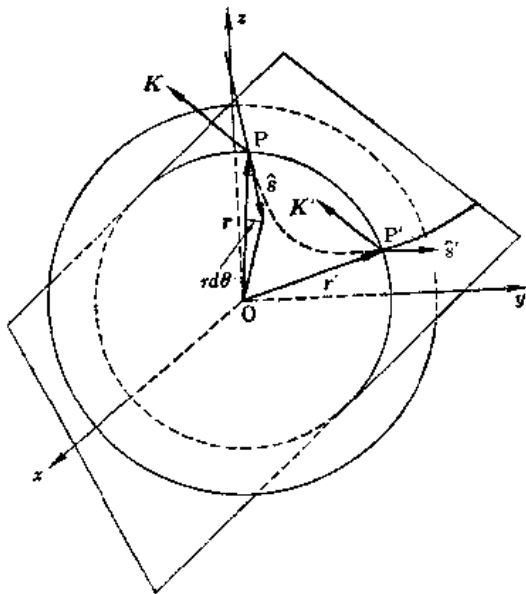


图4.6 折射率为球对称的介质中光线的路径  
必在包含原点的平面内

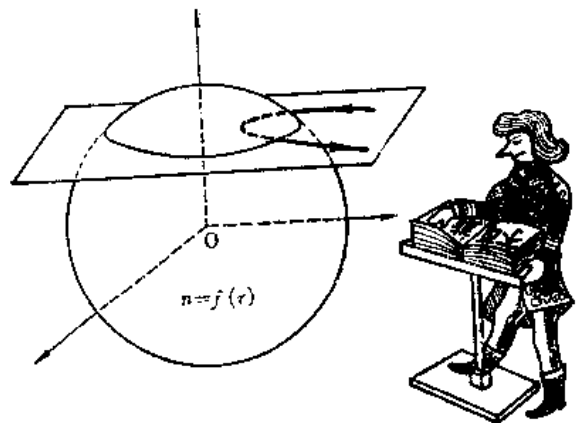


图4.7 如图所示的路径是不可能存在的

若将  $z$  轴取在包含光的路径的平面内, 则  $\nabla L$  的  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  分量为零, 所以, 利用式(4.56), 则程函数方程式(4.8)就成为

$$|\nabla L|^2 = \left( \frac{\partial L}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 = [n(r)]^2 \quad (4.57)$$

为了用变数分离法解出这个方程式的解, 使

$$L(r, \theta) = R(r) + \Theta(\theta) \quad (4.58)$$

并将它代入式(4.57), 则得

$$r^2\{[R'(r)]^2 - [n(r)]^2\} + [\Theta'(\theta)]^2 = 0 \quad (4.59)$$

式(4.59)的第一项是仅与独立变数  $r$  有关的函数, 第二项是仅与独立变数  $\theta$  有关的函数。为了使  $r$  和  $\theta$  值独立地变化时, 其和恒为零, 则第一项和第二项必须是常数, 所以

$$[\Theta'(\theta)]^2 = a^2 \quad (4.60)$$

$$r^2\{[R'(r)]^2 - [n(r)]^2\} = -a^2 \quad (4.61)$$

式(4.60)的解为

$$\Theta(\theta) = \pm a\theta + m_1 \quad (4.62)$$

式(4.61)的解为

$$R(r) = \pm \int^r \sqrt{[n(r)]^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} dr + m_2 \quad (4.63)$$

将式(4.62), (4.63)代入式(4.58)得

$$L(r, \theta) = a\theta + \int_{r_0}^r \sqrt{[n(r)]^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} dr \quad (4.64)$$

式中  $m_1$  和  $m_2$  包含在积分下限中, 而且是只取正号。程函  $L(r, \theta)$  的值已经求得, 所以, 只要利用式(4.24)就能够求出光的路径。为此, 首先用球坐标表示式(4.24)的左边

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad (4.65)$$

$$\therefore d\mathbf{r} = (dr)\hat{\mathbf{r}} + r d\hat{\mathbf{r}} \quad (4.66)$$

因为  $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$ , 所以,  $d\hat{\mathbf{r}}$  的大小从图 4.8(a) 看出是  $d\theta$ , 其方向是  $\hat{\theta}$ , 所以

$$d\mathbf{r} = (dr)\hat{\mathbf{r}} + (rd\theta)\hat{\theta} \quad (4.67)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \hat{\mathbf{r}} \frac{dr}{ds} + \hat{\theta} r \frac{d\theta}{ds} \quad (4.68)$$

在此应该注意的是, 当用直角坐标系时, 座标点无论怎样,  $i, j$  的方向是不变的。所以, 在坐标系内任何地方,  $i$  分量和  $j$  分量的大小之比是一定的。但是, 在球坐标或柱面坐标系中,  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}$  的方向是随着座标点的位置而变化的。例如, 即使是同样的  $\hat{\mathbf{r}}$  在  $\theta = 0$  附近, 是水平方向的, 可是, 在  $\theta = 90^\circ$  附近, 就成垂直方向。因此, 即使是相同的矢量,  $\hat{\mathbf{r}}$  和  $\hat{\theta}$  分量之比也是随场所的变化而变化的。若用球坐标表示, 就成为式(4.68)那样的复杂形式。式(4.68)用图表示的话, 就是图 4.8。

利用式(4.68), 改写式(4.24), 再将其结果分成  $\hat{\mathbf{r}}$  和  $\hat{\theta}$  分量, 则各分量为

$$n \frac{dr}{ds} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad (4.69)$$

$$n \frac{rd\theta}{ds} = \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (4.70)$$

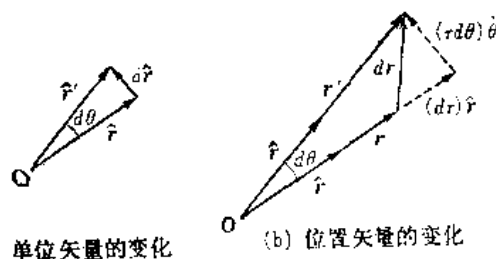


图4.8 位置矢量的微分

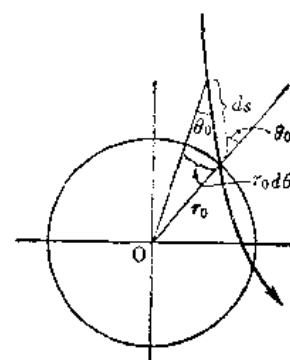


图4.9 入射角

将式 (4.64) 的结果代入式 (4.69), (4.70) 后, 取两式之比, 得

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{a} \sqrt{[nr]^2 - a^2} \tag{4.71}$$

因此, 能得到光的路径的表示式如下

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{adr}{r\sqrt{[nr]^2 - a^2}} \tag{4.72}$$

下面决定常数  $a$  的值, 设光从  $r = r_0$  的点, 以入射角  $\theta_0$  入射, 参考图 4.9, 当  $ds$  非常小时

$$\frac{r_0 d\theta}{ds} = \sin\theta_0 \tag{4.73}$$

将式(4.64), (4.73)代入式(4.70), 则  $a$  值为

$$a = r_0 n(r_0) \sin\theta_0 \tag{4.74}$$

### 4.5 光 纤 维

1870年,英国物理学家(J. Tyndall)把水灌入侧面开有孔的水槽中,喷出的水能导出从水槽上面照射下来的光。他在英国皇家协会上,实地表演了这一“光线能在这种弯曲地喷出的水中传播”的现象,博得了大家的赞赏。实际上,光的路径并不是弯曲的,光是在水柱的内表面上通过多次全反射曲折地前进的,用非常细的玻璃纤维代替水,就是光纤维(optical fiber)。

组成光纤维的玻璃纤维是非常细的,能够使之任意弯曲。光纤维的用途,按光纤维的长度分类。首先,用在比较短的距离内以传送图象,其代表性的应用是在医学方面,例如用于体内检查的纤维显示器(fiber scope)。

如图 4.10 所示,当光纤维一端的排列与另一端的排列不规则地变化时就能把输入图形象改变为密码,而且,除非使用编码时使用的光纤维,否则就不能解读此密码。

图 4.11 表示通过改变纤维两端的排列紧密程度或者扭转程度,能够产生各种要求的图象。

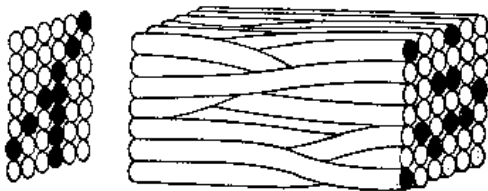


图4.10 光纤维的密码装置只有使用原来编码的光纤维才能进行解读

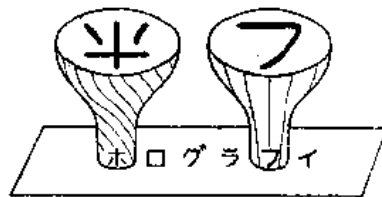


图4.11 由光纤维产生的象的反转与放大

近距离象的传送方法,是将光纤维密集成束使用的。每一根光纤维,传送图象上相应的各个象素。所以,在这些用途中,光纤维必须满足①纤维间的漏光小,②分辨率高,③最小弯曲半径小等条件。

远距离光传送方面的用途,主要是光通信。可作为光线路使用,这种情况下必须满足



① 传输损失小, ② 最小弯曲半径小, ③ 传输失真低, ④ 价廉, ⑤ 使用方便, ⑥ 维修费低等。

光纤有各种类型, 图 4.12 表示光纤的类型及其比较。

首先, 从图 4.12(a) 所示的外包型纤维 (clad fiber) 开始说明。

这是用外包玻璃 (clad glass) 将中心部分的芯玻璃 (core glass) 覆盖起来的纤维。由于芯玻璃的折射率比外包玻璃的折射率取得大, 使光线如图 4.12(a) 所示的那样, 在界面上多次地产生全反射而向前传播。但是, 弯曲部分的曲率半径短时, 就会如图 4.13 所示的那样, 界面上的入射角  $\theta$  在临界角以下, 光线透射到纤维外, 造成光能损失, 而且渗向邻接的纤维, 产生杂光。

消除这缺点的方法是使芯玻璃和外包玻璃的折射率之差增大, 使临界角缩小, 从而使能产生全反射的入射角范围扩大。但是, 入射角不同时, 轴方向的行进速度也不同, 若入射角的范围太大, 则不同入射角的光束之间的传播时间不一致, 引起位相偏差的增大, 造成差错。改善这一缺点的纤维有图 4.12(b) 所示的自聚焦纤维 (Selfoc fiber), Selfoc 是 self focus 的缩略语, 是这种光纤的商品名。

自聚焦纤维是折射率离中心越远则越小的纤维。其折射率的分布接近于平方分布, 可用下式表示

$$n^2 = n_0^2 (1 - Ar^2) \quad (4.75)$$

式(4.50)已经表明, 光线总是弯向折射率增加的方向, 所以, 这种纤维中的光线总是弯向中心轴的方向, 光束不会从光纤中穿出。而且, 用大振幅蛇行的光线其光路虽增长了, 但是, 由于离中心轴越远, 折射率越小, 光的速度越快, 所以和只限于轴向传播速度有关的小曲率蛇行的光速大致相等(这一证明, 留作习题)。因此, 可以避免外包型纤维中出现的位相差。

凸透镜, 不管其入射角如何, 光束总是弯向光轴方向。所以, 有的把自聚焦纤维看成连续排列着的凸透镜, 也有的把具有式(4.75)那样的折射率分布的光纤维称为透镜状纤维。

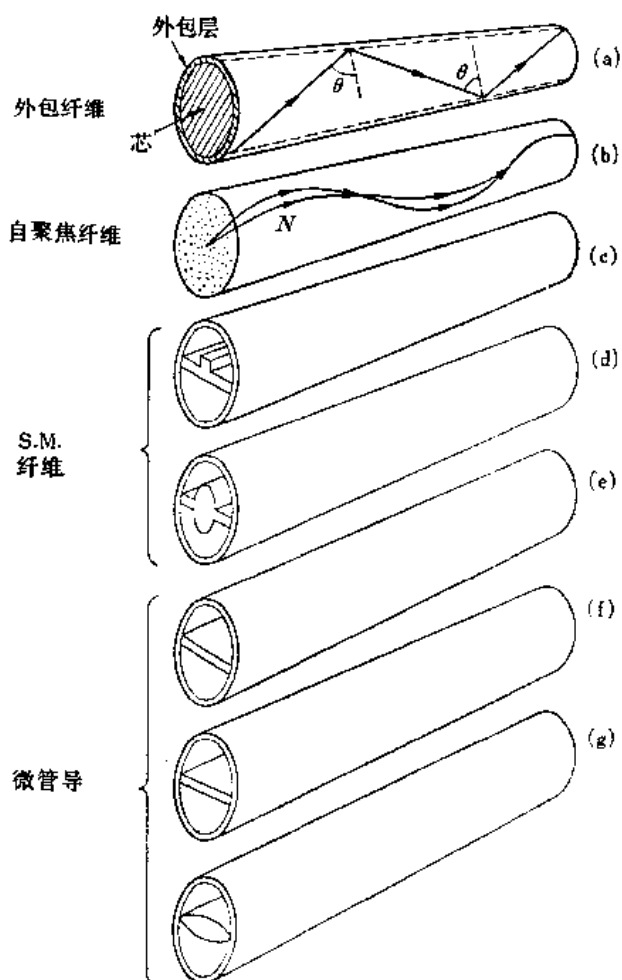


图4.12 用在光纤中的各种玻璃纤维

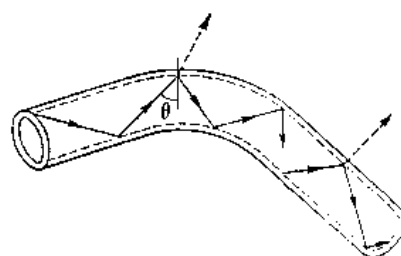


图4.13 光纤弯曲部分的光漏泄

外包型纤维中, 外包和芯玻璃的折射率差大约为 0.5%, 而自聚焦纤维中, 中心部分的折射率和接近外表面的折射率之比约小 0.1%。

下面, 说明一下图 4.12(c) 和 (d) 所示的 S. M. 纤维。S. M. 纤维是 Single material fiber 的缩写。前两种光纤是使用不同折射率的玻璃, 而这是仅用一种玻璃材料做成的光纤。在这种纤维中光的传播方法是和上述的外包型光纤大体上相同, 其差别仅仅是用空气代替了外包层。

图 4.12(e), (f), (g) 所示的光纤维, 称为微导管 (micro guide)。它是由非常薄的玻璃板和支持这板的回转玻璃管所组成的, 只要把这玻璃板的厚度, 做到波长的数量级那样薄。光线与其说是在玻璃板中传播, 倒不如说是作为玻璃板和空气界面上的表面波 (surface wave) 传播的, 在空气中传播比在玻璃中吸收损失少, 所以是一举两得的事。

表面波一般只存在于表面附近 2~3 个波长的范围内, 光的振幅与波长相比其变化非常快, 所以, 几何光学定律不能适用, 这是几何光学极限所在的很好例子。几何光学始终是一种近似的表示法, 要求得到严格的解答, 必须应用波动方程式。

下面, 详细讲述一下这种表面波。为了使说明简单, 仅仅考虑图 4.14 所示的空气和玻璃的界面附近的情况, 当从玻璃中入射的光线以大于临界角的入射角  $\theta_i$  射到界面上时, 从几何光学角度来看, 光线在界面上产生全反射, 光能量在空气一边应该是不存在的。但是当把传感器沿着  $x$  轴从上向下移动, 实地测定一下光强度时, 发现光能量在越过界面的空气中也有着。更详细地观察一下, 发现如下一些事实: ①光的振幅是随着离开界面而急速地、连续地减少的, ②其位相, 在  $x$  轴方向无变化, 在  $y$  轴方向和行波同样地变化, ③  $z$  轴方向的位相速度比自由空间的位相速度慢。

用波动方程式对这些实测的结果加以说明, 在图 4.14 中由于在空气中 ( $x > 0$ ) 行进的平面波  $E$  其  $x, y, z$  分量具有相同的形式, 所以用标量表示一个成分时可用下式表达

$$E = A e^{i k_x x + i k_z z} \quad (4.76)$$

上式表示  $y$  轴方向上位相不变的平面波。  $k_x$  是  $x$  轴方向的位相常数,  $k_z$  是  $z$  轴方向的位相常数,  $k_x$  和  $k_z$  的关系可把式 (4.76) 代入波动方程式

$$(\nabla^2 + k^2) E = 0 \quad (4.77)$$

而求得, 式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

有如下的关系

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 \quad (4.78)$$

所以,  $x$  轴方向的位相常数  $k_x$  为

$$k_x = \sqrt{k^2 - k_z^2} \quad (4.79)$$

还有, 在下面的条件下

$$k < k_z \quad \text{即} \quad \lambda > \lambda_c \quad (4.80)$$

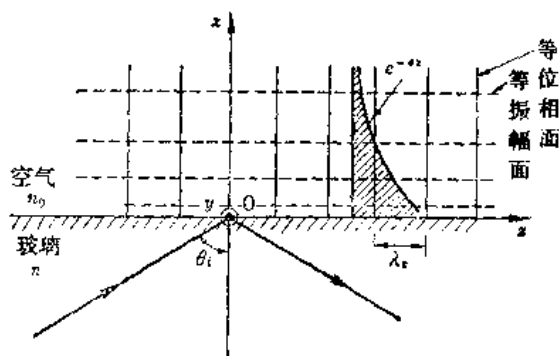


图 4.14 表面波

则  $k_x$  成为纯虚数，就是

$$k_x = j\alpha$$

把这结果代入式(4.76)，就成为

$$E = Ae^{-\alpha x + ik_z z} \tag{4.81}$$

这就是表面波的表达式。

参考图 4.14，对式 (4.81) 加以说明。E 的振幅随  $x$  的增加而以指数函数的形式减少。E 的位相在  $z$  轴方向并随位相常数  $k_z$  而变化。图 4.14 的虚线表示等振幅面，实线表示等位相面，斜线部分是为了表示振幅的衰减而画的。若把数值代入计算一下，则  $k_x = 1.4 k$  时，离表面 0.5 波长位置上的点的振幅，比表面位置衰减 25dB (0.3%)。还有当在  $k_x = 1.1 k$ ， $k_z = 1.03 k$  时，和上面具有同样衰减的距离应分别为 1 个波长，1.5 个波长。 $k_x$  的值越接近  $k$  值，空气中的能量越能扩展开去。

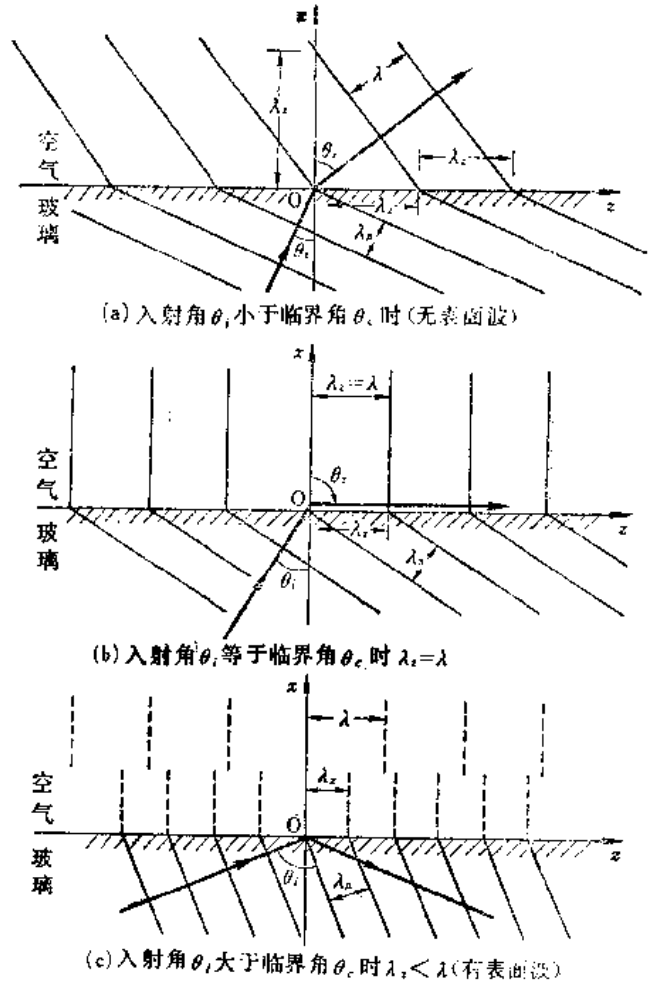


图 4.15 表面波的传播

上面讲到了要使表面波存在，式 (4.80) 是必要条件。下面分析一下这个条件，说明只有光束在玻璃界面上发生全反射时，才会产生表面波。

图 4.15 是表示光从玻璃射入空气和玻璃的界面时，入射角  $\theta_i$  和两介质中波面间的关系的图形。若空气中的波长为  $\lambda$ ，在折射率为  $n$  的玻璃中其波长是  $\lambda_n = \lambda/n$ ，比空气中变短了。

在界面上，空气一侧的光振动和玻璃一侧的光振动必须经常同位相。所以，如果画出等位相面，则玻璃一侧的等位相面和空气一侧的等位相面，在界面上应该是连续的。

波长不同的两个波，要在界面成为同位相，只有如图 4.15(a) 所示的那样，用波面的倾斜来调整其倾斜度，从图 4.15(a) 上，可以找出如下关系

$$\lambda_z = \frac{\lambda_n}{\sin \theta_i} = \frac{\lambda}{\sin \theta_r} \tag{4.82}$$

或者

$$n \sin \theta_i = \sin \theta_r \tag{4.83}$$

即得到了斯内尔定律。

图 4.15(b) 表示进一步增加入射角  $\theta_i$  的情况；随着  $\theta_i$  的增加，玻璃中  $z$  轴方向的波长缩短，所以，空气中  $z$  轴方向的波长也缩短， $\theta_r$  增加。当  $\theta_i$  值达到某值以上时，空气中的  $z$

轴方向的波长出现下限,  $\theta_c = 90^\circ$  时为最小, 其长度就等于自由空间波长  $\lambda$ , 这时的  $\theta_c$  值就是临界角, 这时的波面分布, 表示在图 4.15(b) 上。

若使  $\theta_c$  值增加到比临界角更大, 则由于玻璃中的  $z$  轴方向的波长是缩短的, 空气中  $z$  轴方向的波长是不变的。所以, 在界面上, 不能实现同位相, 因此, 在界面附近的空气中应该存在满足式(4.80)的新的波, 即满足

$$\lambda > \lambda_c$$

这就是表面波, 可以用式(4.81)表示。另一种看法, 可把表面波看成全反射时为了满足边界条件而在界面附近出现的波。

离开界面的点, 其边界条件是它的波长应该是自由空间的波长, 所以, 这种波不存在或者衰减掉, 这一点和式(4.81)的结果完全一致。

图 4.12(e) 是把薄膜上的表面波用于光传送的光纤维。大部分光能在膜的两个表面上, 而作为表面波传播, 另外, 在这种纤维中, 为防止表面波在薄膜面内横向扩展而和管壁产生干涉而采用图 4.12(f) 那样的改良型式。图 4.12(f) 的型式, 是使用了具有自聚焦作用的具有式(4.75)所示的折射率成平方分布的薄膜, 使光能向中心部集中, 从而减少了由于弯曲产生的光泄漏。

图 4.12(g) 的形式, 是使薄膜中心部分的厚度稍有增加用以代替折射率的变化, 而获得同样效果的一种光纤维。

图 4.16 表示的是用光学显微镜或电子显微镜对各种各样的光纤维的断面拍摄的照相。

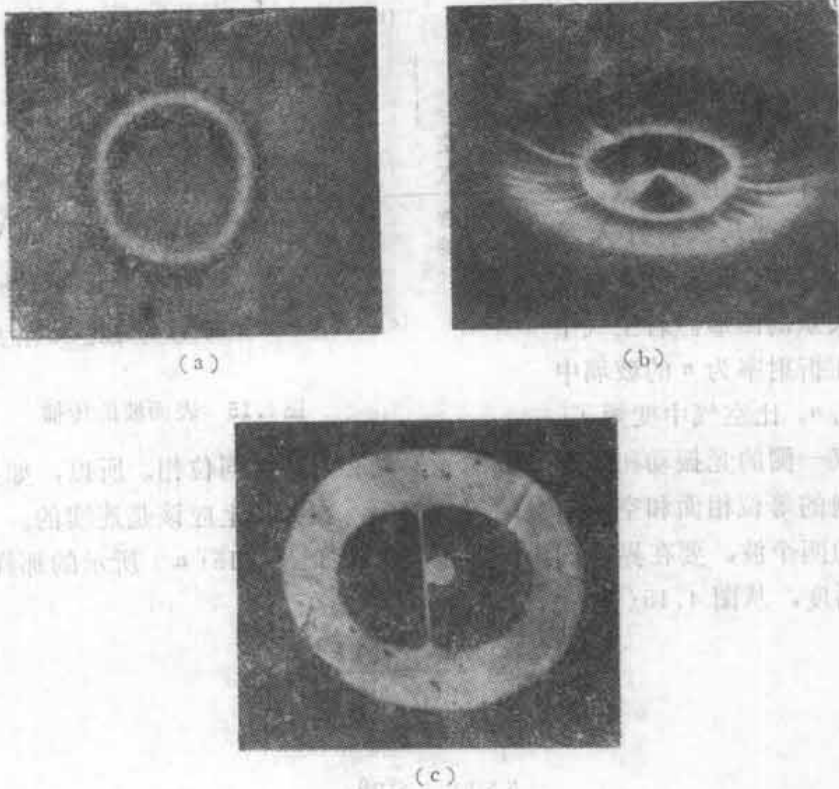


图4.16

(a) 用光学显微镜拍摄的外包纤维断面的照片(C. A. Burrus and R. D. Standley)

(b) 自聚焦纤维经过腐蚀后用电子显微镜拍摄的照片(C. A. Burrus and R. D. Standley)

(c) S. M. 纤维的断面用电子显微镜拍摄的照片(P. Kaiser, E. A. J. Marcatili and S. E. Milles)

习 题

习题4.1 现在考虑一下图 4.17 所示的一维自聚焦纤维，折射率仅在  $z$  轴方向，按下式变化

$$n^2 = n_0^2(1 - a^2z^2)$$

当两个光束从原点以不同的人射角  $\theta_1, \theta_2$  入射时，分别求取光束通过  $z$  轴方向的最高点  $P_1$  和  $P_2$  的  $x$  坐标及两点的位相差。

习题4.2 通过解微分方程 (4.11)，求例题 4.1 中的振幅  $A$ ，设  $\partial A/\partial x = \partial A/\partial y = 0$ 。

习题4.3 如图 4.18 所示，折射率只在  $z$  轴方向有变化，可用下式表示：

$$n_{\pm} = \frac{b}{a \pm z}$$

式中  $a > 0, b > 0$  时  $z < a$

(4.84)

求证：从  $z = z_0$  平行  $x$  轴发射的光束，将描出弧形。

习题4.4 在正文中，已把空气和玻璃界面上存在的表面波的分析结果归纳表示在图 4.14 上，但是，如果在玻璃中有传播损失，空气中的波被玻璃吸收，空气中传播的波随着  $z$  的增加而衰减。

$$k_z = \beta_z + i\alpha_z \quad (4.85)$$

说明这时的等位相面及等振幅面成为图 4.19 的样子，这种波称为漏泄波 (leaky wave)。

习题4.5 图 4.20 表示外包层型光学纤维的断面，光束导入外包层型纤维时，仅仅以一定限度的小角度  $\phi$  入射的光束，能够在光纤中传播。

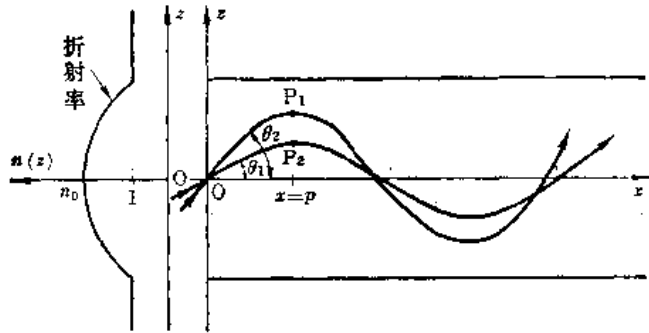


图4.17 一维自聚焦光纤中的光线路径

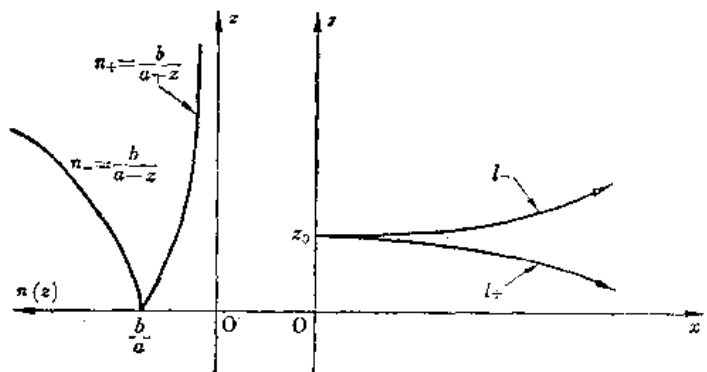


图4.18 当折射率呈  $n = b/(a \pm z)$  变化时，光线的路径是圆弧

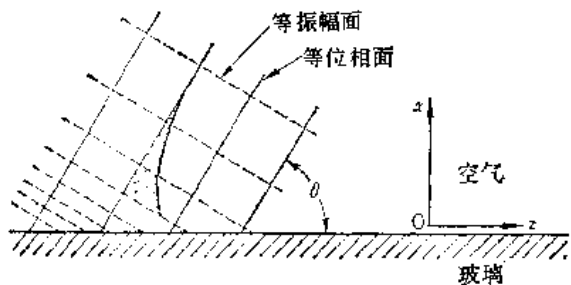


图4.19 漏泄波

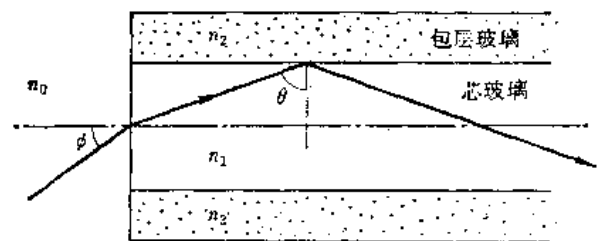


图4.20 光纤 NA (数值孔径) 的计算

当入射角  $\phi$  增大时， $\theta$  值在临界角以下，光束就从光纤中穿出，试证明，为了使光线不穿出而前进，入射角  $\phi$  的最大值  $\phi_c$  可用下式表示

$$NA = n \sin \phi_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4.86)$$

并计算  $n = 1.0$ ,  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1.4$  时的  $\phi_c$  的值。这时, 把式(4.86)的值称为数值孔径( $NA$ ), 用于表示入射角的界限。

## 文 献

- (1) M. Kline and I. W. Kay, "Electromagnetic Theory and Geometrical Optics" Interscience Publishers, New York, 1965.
- (2) M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics" Pergamon Press, New York, 1964.
- (3) 前田憲一, 木村磐根, "電磁波動論", オーム社, 東京, 1970.
- (4) A. Sommerfeld, "Optics" Academic Press Inc., 1954.
- (5) R. K. Luneburg, "Mathematical Theory of Optics," University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1964.
- (6) S. E. Miller, et al, "Research toward optical-fiber transmission systems," Proc, IEEE, Vol. 61 No. 12 (pp. 1703~1751), 1973.
- (7) D. Marcuse, "Light transmission optics," Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
- (8) C. A. Burrus and R. D. Standley, "Viewing Refractive-Index Profiles and Small-Scale Inhomogeneities in Glass Optical Fibers; Some Techniques," Appl. Opt., Vol. 13 (pp. 2365~2369), 1974.
- (9) D. Gloge, "Optical Fibers for Communication," Appl. Opt. Vol. 13 (pp. 249~254), 1974.
- (10) P. Kaiser, E. A. J. Marcatili, and S. E. Miller, "A New Optical Fiber" Bell Syst. Tech. J., Vol. 52 (pp. 265~269), 1973.
- (11) 熊谷信昭, 沢 新之輔, "レンズ状媒質からなる導波系と円形  $TE_{01}$  姿態導波管伝送系との対応について", 電子通信学会論文誌, Vol. 54-B, No. 1 (pp. 39~44), 昭 46-1.
- (12) 末松安晴, "光集積回路", 電子通信学会誌, Vol. 55, No. 9 (pp. 1201~1208), 昭 47-09.
- (13) 浜崎襄二, 藤井陽一, "光受動素子", 電子通信学会誌, Vol. 56, No. 4 (pp. 524~529), 昭 48-04.
- (14) 末松安晴, "光伝送媒質", 電子通信学会誌, Vol. 56, No. 4 (pp. 535~540), 昭 48-04.
- (15) T. Uchida, M. Furukawa, I. Kitano, K. Koizumi, and H. Matsumura "Optical Characteristics of a Light-Focusing Fiber Guide and It's Applications," IEEE Trans. on Quantum Electronics Vol. QE-6 No. 10 (pp. 606~612), 1970.

# 第五章 透 镜

## 5.1 凸透镜的设计

设计一个图 5.1 所示的平凸透镜，要求位于其焦点上的点光源发出的光通过透镜的玻璃厚度后成为平行光线。

从焦点 F 发出，经过透镜前表面上任意一点 P 到达透镜后表面上的 Q 点的光束的位相，要设计得和沿着光轴从 F 点经过 L 点到达 R 点的光束的位相一致。

设 P 点向光轴作垂线时，和光轴的交点为 H，则

$$\overline{PQ} = \overline{HR}$$

因此，只要决定  $\overline{FP}$  的光程和  $\overline{FH}$  的光程相等的玻璃厚度就可以了。

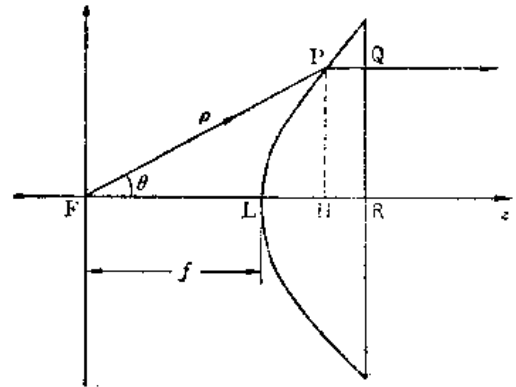


图 5.1 平凸透镜的设计

$$\overline{FP} \text{ 的光程} = \rho$$

$$\overline{FH} \text{ 的光程} = f + n(\rho \cos \theta - f)$$

式中， $n$  为玻璃折射率， $\rho$  就是距离  $\overline{FP}$ ， $f$  就是距离  $\overline{FL}$ ，当两光程相等时可得下式

$$\rho = \frac{(n-1)f}{n \cos \theta - 1} \quad (5.1)$$

这就是玻璃表面的表达式。

下面用直角坐标表示式 (5.1)，现在，只考虑断面的情况，设 P 点的坐标为  $(x, z)$ ，则可以写成

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + z^2} \\ \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

将式 (5.2) 代入式 (5.1)，则得下式

$$\frac{(z-c)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{f}{n-1}, \quad b = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} f, \quad c = \frac{n}{n-1} f \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

很明显，透镜曲面的断面是一双曲线。应该注意，从焦点发出的光是平行光线。但是，其光度分布并不是均匀的。

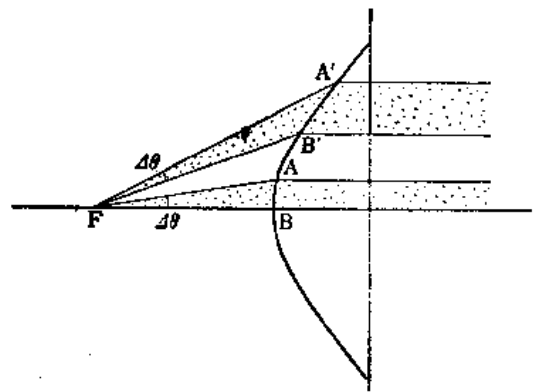


图 5.2 从平凸透镜焦点出射的平行光线的强度分布的不均匀性

图 5.2 中, 把各向同性光分布的点光源放置在焦点上, 从相同立体角  $\angle AFB$  和  $\angle AF'B'$  发出的光通过透镜后的情况如下: 由于从  $\angle AF'B'$  发出的光扩散得较大, 所以, 后者发出的光的强度比前者低, 对广角透镜来说, 这不均匀性更为严重。

## 5.2 用波动光学研究透镜

以上是从几何光学的角度研究了透镜, 本节再从波动光学的角度进行研究。

如图 5.3 所示的平行光线平行  $z$  轴入射透镜时求透过光的位相分布。当透镜的厚度很薄时, 可简单地用式 (5.3) 表示。由于式 (5.3) 中  $b$  值越大,  $z$  值对应于  $x$  的变化越小, 所以, 薄透镜时能满足下面的条件

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 \ll 1 \quad (5.4)$$

这时, 将式 (5.3) 二次展开, 能得到下面的近似式

$$z = a + c + \frac{a}{2b^2}x^2 \quad (5.5)$$

设透镜的平面一侧在  $z = a_0$  处, 则在  $x$  点的玻璃厚度  $t_n$  成为

$$t_n = a_0 - \left( a + c + \frac{a}{2b^2}x^2 \right) \quad (5.6)$$

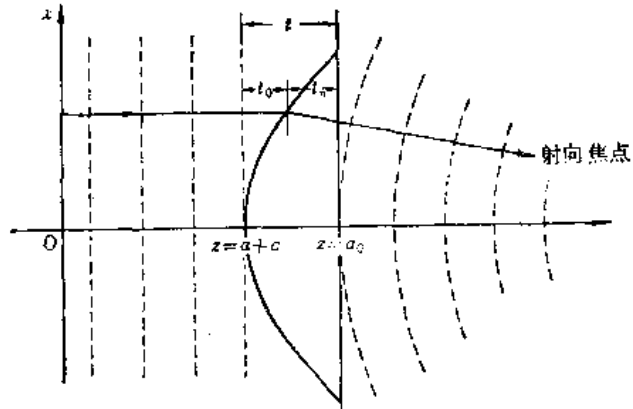


图 5.3 透镜的厚度分布

平行  $z$  轴入射的平行光线通过透镜后, 在  $z = a_0$  处的位相为

$$\phi(x) = k[(a_0 - a - c) - t_n] + nkt_n \quad (5.7)$$

将式 (5.6) 代入式 (5.7), 则

$$\phi(x) = k \left[ n(a_0 - a - c) - \frac{a(n-1)}{2b^2}x^2 \right]$$

若将式 (5.3) 中的  $a, b, c$  值代入上式, 则

$$\phi(x) = \phi_0 - k \frac{x^2}{2f} \quad (5.8)$$

式中

$$\phi_0 = kn(a_0 - f)$$

此外, 在  $y$  方向也可得出同样的关系, 若考虑  $x, y$  两个方向, 则

$$\phi(x, y) = \phi_0 - k \left( \frac{x^2 + y^2}{2f} \right)$$

或

$$= \phi_0 - k \frac{r^2}{2f} \quad (5.9)$$

式中  $r$  是从透镜的轴到  $(x, y)$  点的距离, 可以用  $r^2 = x^2 + y^2$  表示。

其结论是: 通过透镜的光的位相分布, 若在垂直光轴的平面内测量, 位相的超前与半径的平方成正比, 这是透镜的主要性能。



### 5.3 透镜形成的傅里叶变换

在光学信息处理方面，透镜起的作用很大，尤其是在傅里叶变换能力的利用率上是和其成象能力的利用率同样高。透镜傅里叶变换的能力是随着透镜、输入象、屏幕之间的相互位置的不同而有不同的结果。下面对相互位置有各种不同组合情况时加以逐个说明。

#### 5.3.1 输入象和透镜接触时

本节分析图 5.4 所示的情况，也就是在焦距为  $f$  的凸透镜前表面上，存在着透过系数为  $g(x_0, y_0)$  的输入象(输入函数)的情况。设振幅为 1 的平面波垂直透镜面入射，透镜的半径是无穷大，则紧靠透镜背面的面上的光分布为

$$g(x_0, y_0) e^{-jk\left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}\right) + j\phi_0}$$

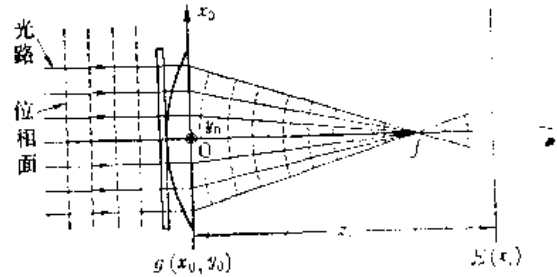


图 5.4 在透镜前表面置掩模  $g(x, y)$ ，而屏幕位于  $z = z_i$  的情况

此波面传到位于菲涅尔领域内  $z = z_i$  处的屏幕上时，此面上的光分布  $E(x_i, y_i, z_i)$  由菲涅尔近似式(2.36)得

$$E(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk\left(z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i}\right)} \mathcal{F}\left\{ g(x_0, y_0) e^{-jk\frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}} \cdot e^{jk\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i}} \right\} \quad f_x = \frac{x_i}{\lambda z_i}, \quad f_y = \frac{y_i}{\lambda z_i} \quad (5.10)$$

式中是假定  $\phi_0 = 0$ 。另外，表示焦距的符号和表示傅里叶变换时的变数  $f$  的符号很容易混淆；所以把后者写成  $f$ 。在特殊情况，即屏幕刚好放置在透镜后焦点上时即：

$$z_i = f$$

那么，式(5.10)就成为

$$E(x_i, y_i, f) = \frac{1}{j\lambda f} \cdot e^{ik\left(f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}\right)} G\left(-\frac{x_i}{\lambda f}, -\frac{y_i}{\lambda f}\right) \quad (5.11)$$

式中

$$G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g(x, y)\}$$

这是非常重要的结果，即，透镜焦面上的光分布，当忽略  $e^{jk(x_i^2 + y_i^2)/2f}$  的位相，就成为输入函数  $g(x_0, y_0)$  的傅里叶变换。

灵活地运用傅里叶变换能力可以进行各种各样的光信息处理。还有，如下面所述的那样，将  $g(x_0, y_0)$  向前移动到透镜的前焦距时，位相  $e^{jk(x_0^2 + y_0^2)/2f}$  的值能等于 1。

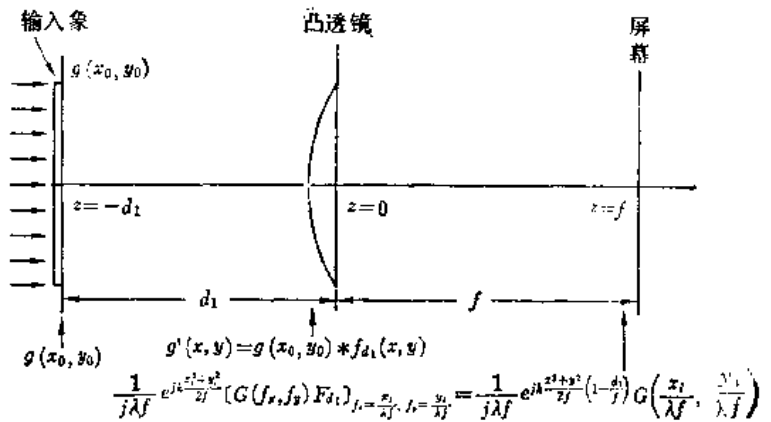


图 5.5 在透镜前方放置掩模  $g(x_0, y_0)$ ，在焦点  $z_i = f$  处放置屏幕时的情况

### 5.3.2 输入象在透镜的前面时

如图 5.5 所示, 将输入象放在透镜前方离透镜为  $d_1$  的地方, 屏幕放置在透镜的后焦面  $z = f$  处进行计算, 如果将输入象到透镜的传播情况和从透镜到屏幕的传播情况分别加以考虑的话, 那么首先利用式(2.34)求出输入象的光分布  $g(x_0, y_0)$  传到透镜的前表面时的光分布  $g'(x, y)$

$$g'(x, y) = g(x, y) * f_{d_1} \quad (5.12)$$

式中

$$f_{d_1} = \frac{1}{j\lambda d_1} e^{jk\left(d_1 + \frac{x^2 + y^2}{2d_1}\right)}$$

以及

$$\mathcal{F}\{f_{d_1}\} = F_{d_1}(f_x, f_y) = e^{jk d_1 - j\pi\lambda d_1(f_x^2 + f_y^2)} \quad (5.13)$$

只要用前一节的  $g(x_0, y_0)$  的值去置换  $g'(x, y)$ , 就可求出在后焦面  $z = f$  处的光分布。所以, 利用式(5.11)而求得

$$E(x_i, y_i, f) = \frac{1}{j\lambda f} e^{jk\left(f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}\right)} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \quad (5.14)$$

式中

$$G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g'(x, y)\} = G(f_x, f_y) \cdot F_{d_1}(f_x, f_y)$$

将式(5.13)代入式(5.14), 则

$$\begin{aligned} E(x_i, y_i, f) &= \frac{1}{j\lambda f} e^{jk\left(d_1 + f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}\right)} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \cdot e^{-j\pi d_1 \lambda \left[\left(\frac{x_i}{\lambda f}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda f}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{j\lambda f} \cdot e^{jk(f+d_1)} \cdot e^{jk\left(-\frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}\right)} \left(1 - \frac{d_1}{f}\right) \cdot G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

式(5.15)中, 若把掩模固定在前焦面  $d_1 = f$  处, 这时, 第二因子被消去, 成为

$$E(x_i, y_i, f) = \frac{e^{j2kf}}{j\lambda f} \cdot G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \quad (5.16)$$

能够求出光屏上的输入函数  $g(x_0, y_0)$  的傅里叶变换值  $G(x_i/\lambda f, y_i/\lambda f)$ 。也就是说, 这和上一节的差别是式(5.11)中有  $x_i, y_i$  的函数  $e^{jk(x_i^2 + y_i^2)/2f}$ , 而式(5.16)中, 无那个因子。本节的结果, 归纳表示在图 5.6 上。

### 5.3.3 输入象在透镜的后方时

本节分析如图 5.7 所示的, 输入象放置在透镜后方的情况。从结论说起, 在这样的情况下, 傅里叶变换象的大小可以随输入象位置的移动而改变。直到上节为止的例题中, 除非使用焦距不同的透镜, 否则傅里叶变换象的大小是不变的。与此相反, 只要移动输入象,

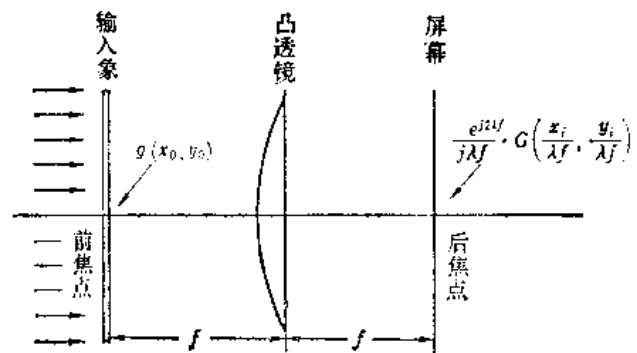


图 5.6 前焦面上放置  $g(x_0, y_0)$ , 在后焦面上得到  $G(x_i/\lambda f, y_i/\lambda f)$

就能调节傅里叶变换象的大小, 这是非常有用的。

如图 5.7 所示, 将屏幕的位置固定在透镜的后焦面上, 将输入象放置在透镜后方, 距离透镜为  $d$  的地方。这时, 也将透镜到输入象的传播情况和输入象到屏幕的传播情况分别考虑, 首先计算透镜出射的光在照射输入象时的光分布。由菲涅尔近似式 (2.34) 得

$$g'(x, y) = e^{-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}} * f_{d_1}(x_0, y_0) \quad (5.17)$$

式中

$$f_{d_1}(x, y) = \frac{1}{j\lambda d_1} e^{jk \left( d_1 + \frac{x^2 + y^2}{2d_1} \right)}$$

$$\mathcal{F}\{f_{d_1}(x, y)\} = F_{d_1}(f_x, f_y) = e^{jkd_1 - j\pi\lambda d_1(f_x^2 + f_y^2)}$$

$$\mathcal{F}\left\{e^{-jk \frac{x^2 + y^2}{2f}}\right\} = -j\lambda f e^{j\pi\lambda f(f_x^2 + f_y^2)}$$

$g'(x, y)$  之值, 可以通过连续地进行傅里叶变换及傅里叶反变换而简化其表现式, 即

$$g'(x_0, y_0) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}\{g'(x_0, y_0)\} = -j\lambda f e^{j\pi\lambda d_1} \mathcal{F}^{-1}\left[ e^{-j\pi\lambda(d_1 - f)(f_x^2 - f_y^2)} \right]$$

因此

$$g'(x_0, y_0) = \frac{f}{f - d_1} \cdot e^{jk \left( d_1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2(d_1 - f)} \right)}$$

其次在输入象后表面上的光分布是

$$g'(x_0, y_0)g(x_0, y_0)$$

此光分布再传播距离  $d_2$  后, 其光分布  $E(x_i, y_i, f)$  由菲涅尔近似式 (2.36) 得

$$E(x_i, y_i, f) = \frac{1}{j\lambda d_2} \cdot e^{jk \left( f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2} \right)} \left( \frac{f}{f - d_1} \right) \mathcal{F}\left\{ g(x_0, y_0) e^{jk \left( \frac{1}{2(d_1 - f)} + \frac{1}{2d_2} \right) (x_0^2 + y_0^2)} \right\}_{f_x = \frac{x_i}{\lambda d_2}, f_y = \frac{y_i}{\lambda d_2}} \quad (5.18)$$

从图 5.7 中可以看出如下的关系

$$d_2 = f - d_1$$

利用这个关系可得如下的最终结果

$$E(x_i, y_i, f) = \frac{1}{j\lambda d_2} \cdot e^{jk \left( f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2} \right)} \left( \frac{f}{d_2} \right) G\left( \frac{x_i}{\lambda d_2}, \frac{y_i}{\lambda d_2} \right) \quad (5.19)$$

从式 (5.19) 可以看出, 光屏面上的象其大小是随  $\lambda d_2$  值的增加而变大的。当  $d_2 = f$  时为最

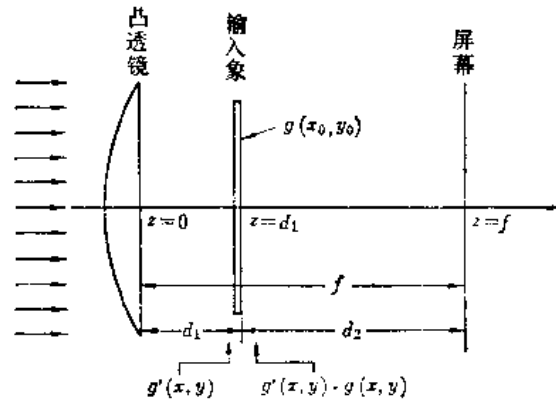


图 5.7 在透镜后  $f$  放置输入象  $g(x_0, y_0)$ , 在焦面  $z_i = f$  放置屏幕的情况

大。印象的大小是随输入象的位置移动而改变的。必须注意，这时和式 (5.11), (5.15) 一样，存在着位相因子。

此外，象的亮度与  $(f/d_2)^2$  成正比。

### 5.3.4 透镜组产生的傅里叶变换

以上情况，都是用一个透镜进行傅里叶变换。这里再分析一下用复杂的透镜系统会聚输入象的情况。若把屏幕放在光线的会聚点上，在光屏面上将形成傅里叶变换的图样。

图 5.8 是假定光线通过任意的透镜系统而会聚在其后面的 P 点上。这时光的波面是收敛的球面波，所以，输入象所在面上的位相分布  $e(x_0)$  是

$$e(x_0) = A e^{-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_2}}$$

式中指数的负号表示收敛的球面波。若是正号，显然就是发散的球面波。

这球面波入射到  $g(x_0, y_0)$  的掩模上并传播到其后距离为  $d_2$  的地方时成为

$$\begin{aligned} E(x_i, y_i, d_2) &= A e^{jk \left( d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2} \right)} \\ &= \mathcal{F} \left\{ g(x_0, y_0) e^{-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_2}} e^{jk \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2}} \right\} f_x = \frac{x_i}{\lambda d_2}, f_y = \frac{y_i}{\lambda d_2} \\ &= A e^{jk \left( d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2} \right)} G \left( \frac{x_i}{\lambda d_2}, \frac{y_i}{\lambda d_2} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

这就是傅里叶变换的图样。

以上是比较麻烦的证明方法。若把图 5.8 所示的整个透镜系统看作一个凸透镜，那么透镜系统焦面上的光分布是输入象的傅里叶变换，这一结果从 5.3.3 节就能明显的看出。

## 5.4 从波动光学的角度研究透镜的成像作用

透镜的成像条件是众所周知的，即

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f} \quad (5.21)$$

现在，由波动光学角度来证明这个公式。

如图 5.9 所示，将输入象放在透镜前方  $d_1$  处时，计算放在透镜后方  $d_2$  处的屏幕面上的象的光分布。计算时将输入象到透镜后焦点的传播情况和后焦点到屏幕的传播情况分别考虑。

从输入象到透镜后焦点的传播情况，在 5.3.2 节中已经计算，得到了式 (5.15)。这里把此值  $e(x, y, f)$  再写一次，即

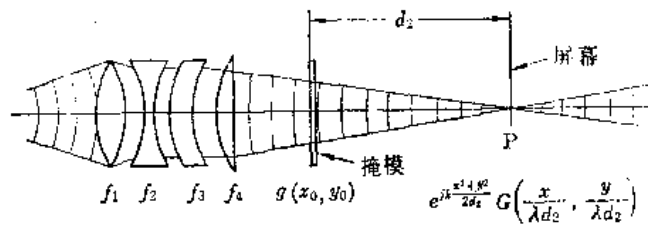


图 5.8 透镜组产生的会聚在 P 点的光束

$$e(x, y, f) = \frac{1}{j\lambda f} \cdot e^{jk(f+d_1)} \cdot e^{jk\left(\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\left(1-\frac{d_1}{f}\right)} \cdot G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

式中 假定了  $z$  轴与光轴重合, 坐标原点在  $z = f$  处, 垂直光轴的面的座标轴为  $x, y$ 。

从后焦点到光屏的传播情况, 是  $e(x, y, f)$  的分布再传播了一段距离  $(d_2 - f)$  后的情况。所以, 可应用式(2.36)而求出  $E(x_i, y_i, d_2)$ 。

$$E(x_i, y_i, d_2) = \frac{1}{j\lambda(d_2 - f)} \cdot e^{jk\left(d_1 + d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2(d_2 - f)}\right)}$$

$$\frac{1}{j\lambda f} \mathcal{F} \left\{ e^{jk\frac{x^2+y^2}{2f}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)} G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) e^{jk\frac{x^2+y^2}{2(d_2-f)}} \right\}_{f_x = \frac{x_i}{\lambda(d_2-f)}, f_y = \frac{y_i}{\lambda(d_2-f)}} \quad (5.22)$$

首先, 只注意式(5.22)中傅里叶变换括号中的指数函数。先把指数  $\phi$  化简, 则

$$\begin{aligned} \phi &= jk \frac{x^2 + y^2}{2} \left[ \frac{1}{f} \left( 1 - \frac{d_1}{f} \right) + \frac{1}{d_2 - f} \right] \\ &= jk \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{1}{f(d_2 - f)} \left[ \left( 1 - \frac{d_1}{f} \right) (d_2 - f) + f \right] \\ &= jk \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{d_1 d_2}{f(d_2 - f)} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

若满足式(5.21)的条件, 则式(5-23)的值为零, 式(5.22)的值为

$$E(x_i, y_i, d_2) = \frac{-f}{(d_2 - f)} \cdot e^{jk\left(d_1 + d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2(d_2 - f)}\right)} g\left(-\frac{fx_i}{d_2 - f}, -\frac{fy_i}{d_2 - f}\right) \quad (5.24)$$

若利用式(5.20)得到的  $f/(d_2 - f) = d_1/d_2$  的关系, 则可以得到

$$E(x_i, y_i, d_2) = -\frac{d_1}{d_2} \cdot e^{jk\left\{d_1 + d_2 + \frac{d_1}{d_2} \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}\right\}} g\left(-\frac{x_i}{d_1/d_1}, -\frac{y_i}{d_2/d_1}\right) \quad (5.25)$$

式(5.25)表示  $d_2/d_1$  倍的实象形成在满足式(5.21)条件的地方,  $x, y$  的负号表示象是倒象。

在此, 应该注意的是只用了一个透镜, 能同时得到傅里叶变换和实象。在焦面上得到傅里叶变换, 在满足成象条件的面上, 得到实象。这似乎只用一个透镜可以实现如图 5.10 所示那样放置二个透镜时所起的作用。但是, 这和图 5.10 的情况有所不同, 当用一个透镜时,

傅里叶变换实象都有式(5.11), (5.15), (5.19)所示的位相因子, 因此, 仅仅在光强分布上与傅里叶变换或实象的光强分布相一致, 在位相上二者甚至并不一致。

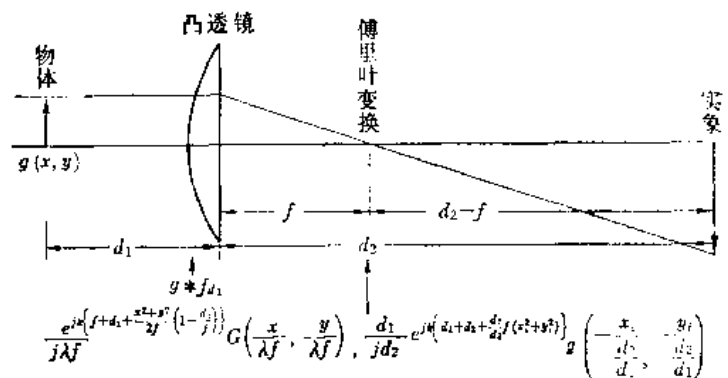


图5.9 透镜的成象条件

但是，如果用图 5.10 所示的二个透镜，则无论是傅里叶变换还是实象，都无位相失真，因此位相和振幅都能得到正确的值。

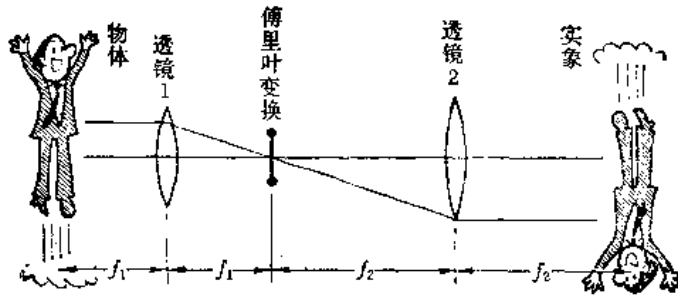


图5.10 使用二个透镜的傅里叶变换与成象

### 5.5 透镜大小和象质

以上进行的分析，都是假定透镜为无限大，从物体发出的光是全部到达象面的。本节讨论透镜为有限大时，给象的清晰度造成的影响。现在，如图 5.11 所示，用直径为  $D$  的透镜将放在远方区域中的透过率分布为  $g(x)$  的一维输入象成象在屏幕上。

输入象产生的衍射光是向着所有方向行进的，可是，其中参与成象的光，仅仅是从输入象面观察透镜的立体角以内的光。

现在，仅看  $g(x)$  具有的空间频率成分中  $f_c$  的频率变量。

利用式(2.31)，可求出这个成分的衍射方向表示式为

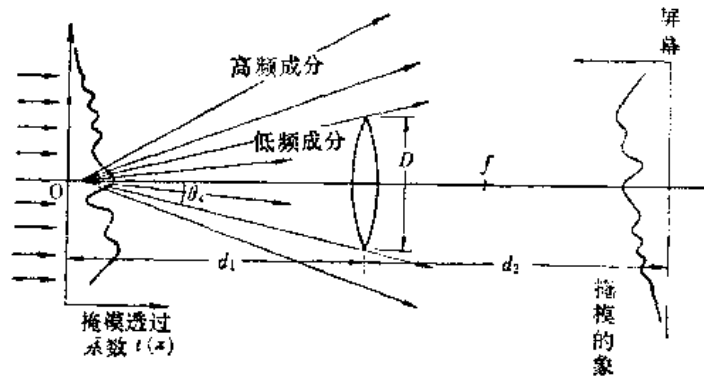


图5.11 透镜大小为有限时的成象

$$u(\theta) = K_0 \mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 x}\} f = \frac{\sin \theta}{\lambda} = K_0 \delta\left(\frac{\sin \theta}{\lambda} - f_c\right) \quad (5.26)$$

因此，衍射光向着  $\theta = \sin^{-1}(f_c \lambda)$  的方向前进， $f_c$  值越大，即越是高频成分，其衍射角  $\theta$  也越大。

图 5.11 中，进入透镜面内的衍射光中，其最高频率成分  $f_c$  为

$$f_c = \frac{\sin \theta_c}{\lambda} \approx \frac{D}{2\lambda d_1} \quad (5.27)$$

式中  $d_1$  是输入象到透镜的距离。

所以，比  $g(x)$  的  $f_c$  高的空间频率成分是不参与成象的，由于缺少能表示微细变化的必要的高频成分，使象有些模糊。

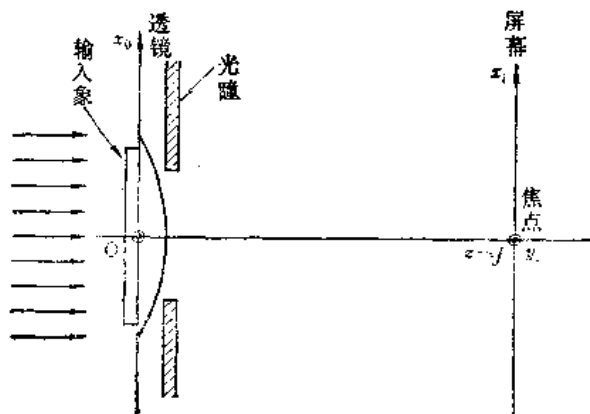


图5.12 使用有限大小的透镜的傅里叶变换

下面，再详细讨论一下傅里叶变换时和成象时的“模糊程度”。

### 5.5.1 透镜大小对傅里叶变换象的影响

本节研究透镜的孔径大小和象质的关系。如图 5.12 所示，将输入象与孔径为有限大的透镜接触，求输入函数的傅里叶变换。

用 3.6 节定义的瞳函数  $P(x, y)$  表示透镜的孔径。设透镜的焦距为  $f$  时就可应用 5.3.1 节的处理结果。

由于 5.3.1 节的情况和现在的情况的不同点，仅仅是输入函数用  $g(x_0, y_0)P(x_0, y_0)$  代替  $g(x_0, y_0)$ 。所以屏幕面上的光分布  $E(x_i, y_i, f)$  可应用式(5.11)求得

$$E(x_i, y_i, f) = \frac{1}{j\lambda f} e^{jk\left(f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}\right)} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) * \overline{P}\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \quad (5.28)$$

式中

$$\mathcal{F}\{P(x, y)\} = \overline{P}(f_x, f_y)$$

将式(5.28)和式(5.11)作比较，可以看出，孔径面的大小，是有限的或者是无限的。其差别在于是否成为傅里叶变换值和  $\overline{P}(x_i/\lambda f,$

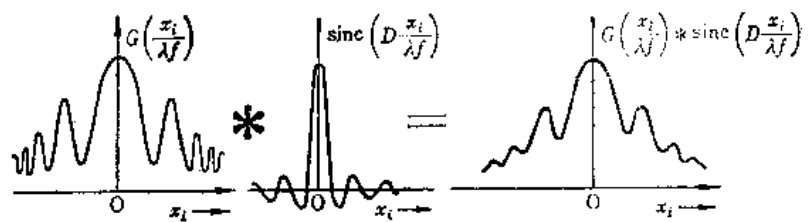


图5.13 透镜的直径为有限时的“模糊”

$y_i/\lambda f)$  的合成。如果成为与  $\overline{P}(x_i/\lambda f, y_i/\lambda f)$  的合成，则象就有某种程度的模糊。

把一维孔径作为例子来具体说明一下，设孔径的宽度为  $D$ ，则

$$P(x) = \Pi\left(\frac{x}{D}\right) \quad (5.29)$$

$$\overline{P}\left(\frac{x_i}{\lambda f}\right) = D \text{sinc}\left(D\frac{x_i}{\lambda f}\right) \quad (5.30)$$

若用图表示  $G(x_i/\lambda f)$  和  $D \text{sinc}(Dx_i/\lambda f)$  合成的运算，就成为图 5.13。“模糊的程度”由  $\text{sinc}(Dx_i/\lambda f)$  的主瓣的宽度  $f\lambda/D$  决定，设能分辨的最小尺寸  $\Delta x_i$  等于主瓣的宽度，则

$$\Delta x_i = 2 \frac{f}{D} \lambda \quad (5.31)$$

例如， $D = 10$  毫米， $\lambda = 0.6 \times 10^{-3}$  毫米， $f = 50$  毫米时  $\Delta x = 6 \times 10^{-3}$  毫米。

当孔径面是圆形，其直径为  $D$  时，能分辨的最小尺寸  $\Delta l$  只要参考 3.4 节立即可以得到

$$\Delta l = 2.44 \frac{f}{D} \lambda \quad (5.32)$$

### 5.5.2 透镜大小对成象的影响

本节研究透镜用于成象时，透镜大小和实象的分辨率之间的关系。

如图 5.14 所示，用焦距为  $f$ ，瞳函数为  $P(x, y)$  的透镜，把放在透镜前方  $d_0$  处的输入象  $g(x_0, y_0)$  的实象形成在透镜后方  $d_i$  处的屏幕上。

将输入象到透镜孔径面的传播情况和透镜孔径面到屏幕面的传播情况分别加以考虑。首先，应用式(2.36)可求出透镜孔径面上的分布  $g_i(x, y)$

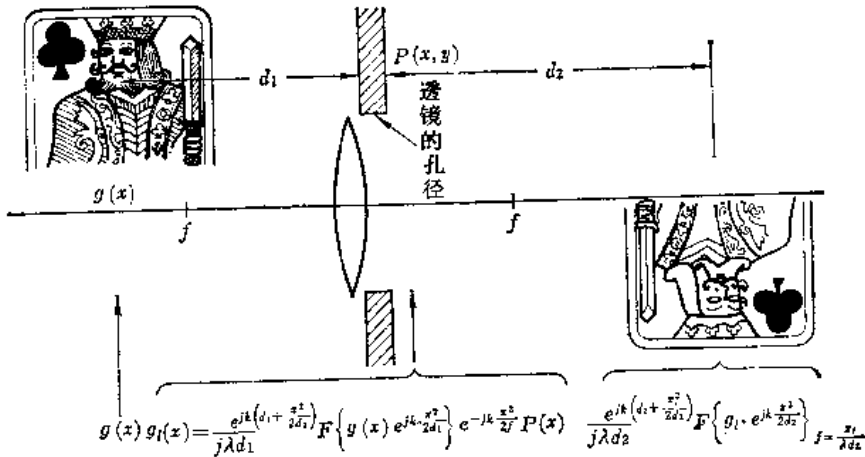


图5.14 透镜大小为有限时的成象（一维）

$$g_i(x, y) = \underbrace{\frac{1}{j\lambda d_1} \cdot e^{jk\left(d_1 + \frac{x^2 + y^2}{2d_1}\right)} \mathcal{F}\left\{g(x, y) e^{jk\frac{x^2 + y^2}{2d_1}}\right\}}_{\text{透镜前方的分布}} \underbrace{e^{-jk\frac{x^2 + y^2}{2f}} P(x, y)}_{\text{透镜后方的分布}} \quad (5.33)$$

应注意，图 5.14 下面的数学式表示纸面内的一维情况。把式(5.33)改写一下，就成为

$$g_i(x, y) = \frac{1}{j\lambda d_1} \cdot e^{jk\left[d_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f}\right)(x^2 + y^2)\right]} G_{d_1}\left(\frac{x}{\lambda d_1}, \frac{y}{\lambda d_1}\right) P(x, y) \quad (5.34)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \text{此外} \quad g_{d_1}(x, y) &= g(x, y) e^{jk\frac{x^2 + y^2}{2d_1}} \\ \mathcal{F}\{g_{d_1}(x, y)\} &= G_{d_1}(f_x, f_y) \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

下面，应用式(2.36)求孔径面到光屏的传播

$$E(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda d_2} \cdot e^{jk\left(d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2}\right)} \mathcal{F}\left\{g_i(x, y) e^{jk\frac{x^2 + y^2}{2d_1}}\right\}_{f_x = \frac{x_i}{\lambda d_2}, f_y = \frac{y_i}{\lambda d_2}} \quad (5.36)$$

将式(5.34)，(5.35)代入式(5.36)，则

$$\begin{aligned} E(x_i, y_i) &= -\frac{1}{\lambda^2 d_1 d_2} \cdot e^{jk\left(d_1 + d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2}\right)} \mathcal{F}\left\{e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2}\right)(x^2 + y^2)}\right. \\ &\quad \left. G_{d_1}\left(\frac{x}{\lambda d_1}, \frac{y}{\lambda d_1}\right) P(x, y)\right\}_{f_x = \frac{x_i}{\lambda d_2}, f_y = \frac{y_i}{\lambda d_2}} \quad (5.37) \end{aligned}$$

在成象条件成立的情况下，此式成为

$$\begin{aligned} E(x_i, y_i) &= -\frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{jk\left(d_1 + d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2}\right)} \left\{ \left[ g\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot e^{jk\frac{x_i^2 + y_i^2}{2Md_2}} \right] * P\left(\frac{x_i}{\lambda d_2}, \frac{y_i}{\lambda d_2}\right) \right\} \quad (5.38) \end{aligned}$$



式中,  $M$ 是倍率

$$M = \frac{d_2}{d_1}$$

若作式(5.38)的合成演算, 则

$$E(x_i, y_i) = -\frac{1}{M} \cdot e^{jk \left[ d_1 + d_2 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_2} \left( 1 + \frac{1}{M} \right) \right]} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \left( \frac{x_i - \xi}{M}, \frac{y_i - \eta}{M} \right) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{\lambda d_2 M} (x_i \xi + y_i \eta) + j \frac{\pi}{\lambda} \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{d_2 M}} \cdot \overline{P} \left( \frac{\xi}{\lambda d_2}, \frac{\eta}{\lambda d_2} \right) d\xi d\eta \quad (5.39)$$

式(5.39)的运算是复杂的, 但是,  $\overline{P}(x_i/\lambda d_2, y_i/\lambda d_2)$ 的值, 只在原点附近有大的值, 在其他的  $x_i, y_i$  点上全部是零的函数, 式(5.39)可以进一步取近似。这点可以对一维孔径的情况, 输入典型的数值来加以说明。

设一维孔径的宽度为  $D$ , 则

$$P(x, y) = \Pi \left( \frac{x}{D} \right) \quad (5.40)$$

$$\overline{P}(x, y) = D \operatorname{sinc} \left( D \frac{x_i}{\lambda d_2} \right) \quad (5.41)$$

设典型数值为

$$\left. \begin{aligned} D &= 60 \text{ 毫米} \\ d_1 = d_2 &= 100 \text{ 毫米} \\ \lambda &= 0.6 \times 10^{-3} \text{ 毫米} \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

将这些值代入式(5.39), 则得

$$E(x_i, y_i) = -\frac{1}{M} \cdot e^{jk \left[ d_1 + d_2 + \frac{1}{2Mf} (x_i^2 + y_i^2) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j100(x_i \xi + y_i \eta) + j50(\xi^2 + \eta^2)} \cdot g \left\{ -\frac{d_1}{d_2} (x_i - \xi), -\frac{d_1}{d_2} (y_i - \eta) \right\} \cdot \operatorname{sinc} \left( \frac{\xi}{10^{-3}} \right) d\xi \quad (5.43)$$

当  $|\xi|$  值达到  $10^{-3}$  以上时, 与  $\xi = 0$  时的值相比是非常小的值, 所以, 即使把式(5.43)的积分范围限定在  $-10^{-3}$  到  $10^{-3}$ ,  $\operatorname{sinc}(\xi/10^{-3})$  的值的误差也是很小的。在此积分范围内, 被积分项中的指数函数  $e^{-j100(x_i \xi + y_i \eta) + j50(\xi^2 + \eta^2)}$  的值在  $|x_i| + |y_i| < 10$  的范围内几乎可以看作 1。结果, 式(5.43)可以近似地成为

$$E(x_i, y_i) = -e^{jk \left[ d_1 + d_2 + \frac{1}{2Mf} (x_i^2 + y_i^2) \right]} \left[ g \left( -\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M} \right) * \operatorname{sinc} \left( D \frac{x_i}{\lambda d_2} \right) \right] \quad (5.44)$$

从这典型例子可以看出, 式(5.38)可以作如下的近似

$$E(x_i, y_i) = -\frac{1}{M} \cdot e^{jk \left[ d_1 + d_2 + \frac{1}{2Mf} (x_i^2 + y_i^2) \right]} \cdot \left[ g \left( -\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M} \right) * \overline{P} \left( \frac{x_i}{\lambda d_2}, \frac{y_i}{\lambda d_2} \right) \right] \quad (5.45)$$

当透镜尺寸为无限大时,  $\overline{P}(x_i/\lambda d_2, y_i/\lambda d_2)$  成为  $\delta$  函数。  $E(x_i, y_i)$  表示清晰的实象,

但是，只要透镜的大小是有限的，即使透镜无象差，当和  $\overline{P}(x_i/\lambda d_2, y_i/\lambda d_2)$  合成就会引起模糊，这是不可避免的。在无象差的理想的光学系统中，象的模糊仅仅是由衍射现象产生的，这种光学系统称为“衍射极限系统 (diffraction limited system)”。另外，用无象差的物体望远镜看亮度低的星时，由于可见范围是由到达的光能量决定的，所以这种情况称为“能量极限 (power limited)”。有些实验装置受经费限制，这些系统在这里就不讨论了。

下面，将式(5.40)表示的一维孔径作为例子来说明一下“模糊程度”的问题。这时，屏幕上的象成为式(5.44)所示的式样，象和  $\text{sinc}(D \cdot x_i/\lambda d_2)$  的合成，可以和图 5.13 的情况同样求出。设能分辨的最小尺寸等于主瓣的宽度，则此尺寸  $\Delta x_i$  应为

$$\Delta x_i = 2 \frac{d_2}{D} \lambda \tag{5.46}$$

式(5.46)是屏幕面上象的分辨率的表示式。为了把它换算成物体面上的分辨率，可乘以  $1/M = d_1/d_2$ ，于是得到

$$\Delta x_o = 2 \frac{d_1}{D} \lambda \tag{5.47}$$

而且，分辨率极限与最高空间频率  $f_c$  之间有下列关系

$$f_c = 1/\Delta x_o$$

所以，和式(5.27)的结果完全一致。

### 习 题

**习题 5.1** 求证：如图 5.15 所示的新月形透镜的前曲面  $\sigma$  是球面，其球心在焦点  $F$  时，其后曲面的表示式为

$$r = \frac{f(n-1)}{n - \cos \theta} \tag{5.48}$$

式中  $f$ ：焦点到后顶点的距离  
 $n$ ：玻璃的折射率  
 $\theta$ ：仰角

**习题 5.2** 用镜头相对孔径  $F = 1.2$  ( $F = f/D$ ，式中， $D$  是透镜的直径， $f$  是焦距) 的照相机，拍摄图面缩小照片。图面上的最高空间频率是  $f_c = 1$  线对/毫米，当此照相机达到衍射极限时，求这照相机拍摄的缩小率(照相的大小/物体的大小)的极限值，设照明光的波长为  $\lambda = 0.555$  微米。

**习题 5.3** 如图 5.17 所示，用焦距  $f$  的凸透镜，把放在光屏前 ( $z = d_1$ ) 的输入象的傅里叶变换投影到屏幕 ( $z = f$ ) 上。屏幕面上的光分布是输入象的傅里叶变换，其上有位相因子。为了去掉这个位相因

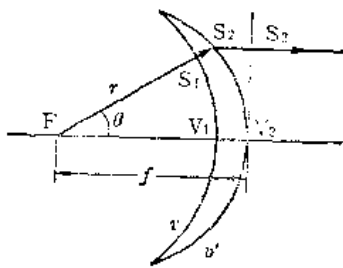


图5.15 新月形透镜的设计

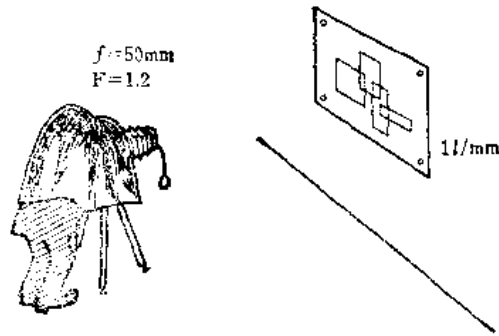


图5.16 照相机的缩小极限

子，把凹透镜放在光屏的前面( $z = f$ )，求这凹透镜的焦距。

**习题 5.4** 如图 5.18 所示，把输入象  $t_1(x_0, y_0)$ 、 $t_2(x_1, y_1)$  分别紧贴在焦距为  $f_1 = 2a$ 、 $f_2 = a$  的两个透镜上，透镜  $L_1$ 、 $L_2$ ，屏幕三者间的间隔相等，并等于  $2a$ ，求屏幕面上的光分布。

**习题 5.5** 柱面透镜具有对  $x$ 、 $y$  成分中的某一个成分进行傅里叶变换的能力。

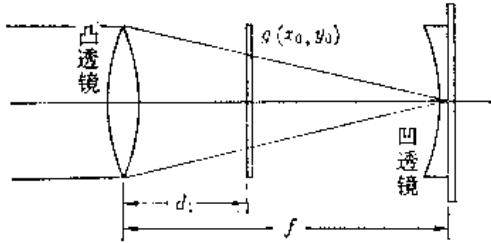


图5.17 使用凹透镜来抵消位相因子

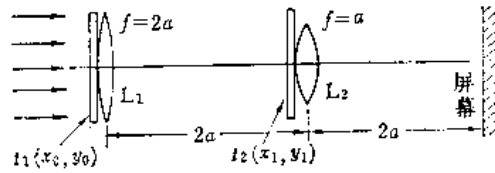


图5.18 用二个凸透镜的运算

如图 5.19 所示的那样放置凸透镜和柱面透镜时， $P_2$  面上形成怎样的象？这样布置的透镜，能用在什么场合？

**习题 5.6** 光学系统的理论和通信工程学的理论，有很多相似的地方，用图 5.20 所示的等效电路表示图 5.14 所示的成象光学系统时，在空白的矩形中，填入怎样的数学式才合适？

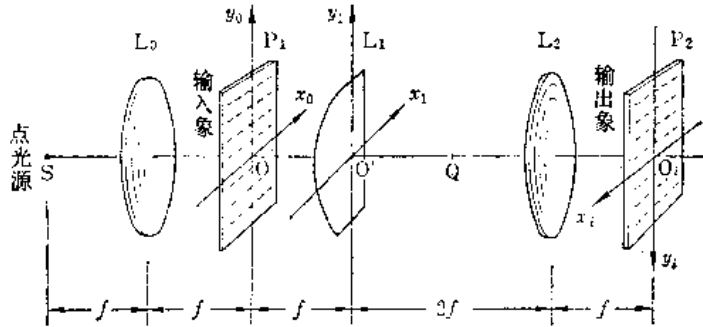


图5.19 很多行同时进行傅里叶变换时的透镜系统

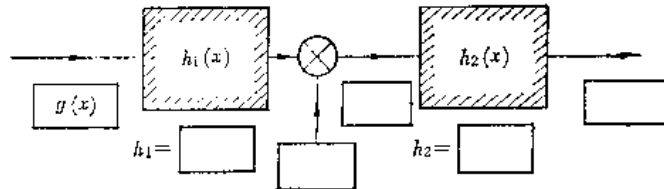


图5.20 透镜的等效电路

【注】在光学系统中，只要用透镜就能极简单地把象缩小，若使用上面的模拟装置，就能够缩小雷达的脉冲宽度，将透镜系统的空间频率，原封不动地替换成时间频率，从电气上实现上图所示的电路就能缩小雷达的脉冲宽度，提高雷达的分辨能力。

### 文 献

- (1) J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics," McGraw Hill Book Company, New York, 1968.
- (2) A. Papoulis, "Systems and transforms with applications in optics," McGraw Hill Book Company, New York, 1968.
- (3) J. R. Meyer-Arendt, "Introduction to classical and modern optics," Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1972.
- (4) Hecht and Zajac, "Optics," Addison and Wesley, Reading Massachusetts, 1974.
- (5) E. L. O'Neal, "Introduction to statistical optics," Addison and Wesley, Reading Massachusetts, 1963.

## 第六章 高速傅里叶变换 (FFT)

### 6.1 何为FFT (Fast Fourier Transform)?

正如傅里叶变换表所表示的那样, 能够用积分、用解析法求取傅里叶变换的函数是非常有限的, 所以, 在不能用解析法求取其积分值时, 就必须依赖于数值计算。若采用将被积分项直接分割成许多小段, 然后再进行相加这种方式进行此积分的话, 即使使用了高速计算机也是很花时间的。

1965年库利 (Cooley) 和图基 (Tukey) 发表了将分割项巧妙地相互相加, 使计算时间迅速缩短的计算方法 (称为 Cooley-Tukey 算法)。后来, 就把这种方法称为 FFT (Fast Fourier Transform)。例如, 把分割成 8192 点的傅里叶变换用电子计算机计算时, 用普通程序的方法必须要 30 分钟, 而用 FFT 程序的方法时, 计算时间可缩短到仅需要 5 秒钟。

用 FFT 计算时与一般方法计算时, 其计算次数之比示于图 6.1。

除经济上的优点以外, 实际工作中往往还必须进行实时数据处理。例如, 雷达反射象的处理就必须计算的高速化。这样 FFT 的计算就成为必不可少。对傅里叶积分变换, 其定义如下:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx \quad (6.1)$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f x} df \quad (6.2)$$

其对应的离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform 即 DFT) 其定义如下:

$$G_l = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i2\pi k l / N} \quad (6.3)$$

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} G_l e^{i2\pi k l / N} \quad (6.4)$$

式中  $j = \sqrt{-1}$  是虚数单位。

变换式 (6.3) 与逆变换式 (6.4) 从数学上看是完全相同的, 仅在指数的符号上有正或者负以及有没有正常因子 (Normalizing factor)。因此, 仅用变换式 (6.3) 来加以说明。首先把式 (6.3) 改成更加容易书写的形式:

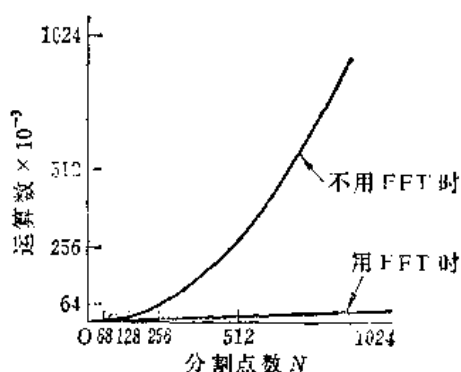


图6.1 FFT计算与一般计算时计算次数的比较

$$G_l = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W^{kl} \quad l = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.5)$$

式中  $W = e^{-j2\pi/N}$  (6.6)

根据式 (6.5) 可用如下的  $N \times N$  阶行列式来表示离散傅里叶变换 (DFT)。同样, 可以用因次  $N$  趋向无穷大时的行列式来表示一般的傅里叶变换。

$$\begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & \dots & W^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

由行列式 (6.7) 决定的  $G_{N-1}$  的个数与  $g_{N-1}$  的个数相等。若取样点为  $N$  个, 则频谱点也只有  $N$  个。可是, 行列  $[W]$  的行列元素是由式 (6.6) 那样一种独特形式形成的。随着这种性质的巧妙利用, 行列式的计算就可以得到简化, 这个简化的计算就是 FFT。

以取样点  $N = 8$  的 8 点傅里叶变换为例来加以说明, 把  $N = 8$  代入 (6.5), (6.7) 式, 则有:

$$\begin{aligned} G_0 &= W^0 g_0 + W^0 g_1 + W^0 g_2 + W^0 g_3 + W^0 g_4 + W^0 g_5 + W^0 g_6 + W^0 g_7 \\ G_1 &= W^0 g_0 + W^1 g_1 + W^2 g_2 + W^3 g_3 + W^4 g_4 + W^5 g_5 + W^6 g_6 + W^7 g_7 \\ G_2 &= W^0 g_0 + W^2 g_1 + W^4 g_2 + W^6 g_3 + W^8 g_4 + W^{10} g_5 + W^{12} g_6 + W^{14} g_7 \\ G_3 &= W^0 g_0 + W^3 g_1 + W^6 g_2 + W^9 g_3 + W^{12} g_4 + W^{15} g_5 + W^{18} g_6 + W^{21} g_7 \\ G_4 &= W^0 g_0 + W^4 g_1 + W^8 g_2 + W^{12} g_3 + W^{16} g_4 + W^{20} g_5 + W^{24} g_6 + W^{28} g_7 \\ G_5 &= W^0 g_0 + W^5 g_1 + W^{10} g_2 + W^{15} g_3 + W^{20} g_4 + W^{25} g_5 + W^{30} g_6 + W^{35} g_7 \\ G_6 &= W^0 g_0 + W^6 g_1 + W^{12} g_2 + W^{18} g_3 + W^{24} g_4 + W^{30} g_5 - W^{36} g_6 + W^{42} g_7 \\ G_7 &= W^0 g_0 + W^7 g_1 + W^{14} g_2 + W^{21} g_3 + W^{28} g_4 + W^{35} g_5 - W^{42} g_6 + W^{49} g_7 \end{aligned} \quad (6.8)$$

如果用这个形式计算, 式 (6.8) 就需要 64 个相乘与 56 个相加的运算。用计算机把乘法变成重复的相加运算。计算时间缩短的关键是乘法运算数的减少。

$W^{kl}$  之值是从  $W^0$  到  $W^{49}$ , 从式 (6.6) 可以看出,  $W^{kl}$  之值呈周期性变化, 所以,  $W^0$  到  $W^{49}$  可以用  $W^0 \dots W^7$  的 8 个值中的某一个来表示。如图 6.2 那样在复数平面上表示出来, 则  $W^{kl} = (e^{-j2\pi/N})^{kl}$ 。当  $N = 8$ , 就表示半径为 1 的圆弧上有弧度为  $2\pi/8$  的等间隔点存在。

圆弧上同一点, 当然  $W^n$  是同值的, 在对角线上的点, 则符号相异。这样式 (6.8) 的计算, 参照图 6.2, 可以首先把  $W^n$  之值同项的加以归并, 然后相乘, 则相乘的个数就能减少, 例如:

$$\begin{aligned} G_2 &= (g_0 + g_4) + W^2(g_1 + g_5) + W^4(g_2 + g_6) + W^6(g_3 + g_7) \\ G_3 &= (g_0 - g_4) + W^3(g_1 - g_5) + W^6(g_2 - g_6) + W^9(g_3 - g_7) \end{aligned}$$

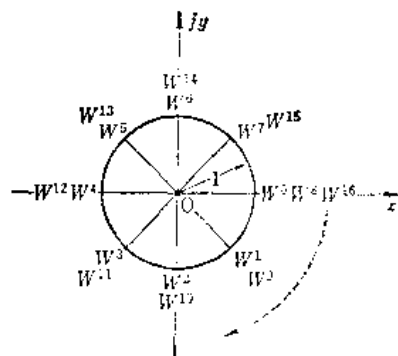


图 6.2  $W^{kl}$  的复数平面表示

若把这些结果加以归并, 并用行列的形式写成:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} G_0 \\ G_2 \\ G_4 \\ G_6 \\ G_1 \\ G_3 \\ G_5 \\ G_7 \end{array} \right\} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^5 & W^6 & W^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^6 & W^{10} & W^{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 + g_4 \\ g_1 + g_5 \\ g_2 + g_6 \\ g_3 + g_7 \\ g_0 - g_4 \\ g_1 - g_5 \\ g_2 - g_6 \\ g_3 - g_7 \end{pmatrix} \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

从式 (6.9) 的行列式中看出有数值的部分是二个  $4 \times 4$  阶的小行列式, 其他二个 小行列部分全部为零。与式 (6.8) 相比, 显然, 乘法的运算数是其一半。

再用同样的方法改写一下, 用  $4 \times 4$  的小行列式来代替式 (6.9) 的计算, 就能够使其中的二个  $2 \times 2$  小行列式的成分等于零, 于是能够进一步减少相乘的数目, 系统的进行这种改写就是 FFT。FFT 的方法还能够分为两大类, 这将在下面详细叙述。

## 6.2 FFT (频率筛选方法) 的原理

现在有  $N$  个取样点其值为  $g_0, g_1, \dots, g_k, \dots, g_{N-1}$ , 求其 DFT 之值, 首先把这些取样点等分成从第一号到  $(N/2-1)$  号为止以及从  $\frac{N}{2}$  到  $N$  号为止, 也就是:

$$\left. \begin{array}{l} f_k = g_k \\ h_k = g_{k+N/2} \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2-1 \end{array} \right\} \quad (6.10)$$

式中

把式 (6.10) 代入 DFT 的计算式 (6.5),

$$\begin{aligned}
 G_l &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{kl} + \sum_{k=0}^{N/2-1} g_{k+N/2} W^{\left(\frac{N}{2}+k\right)l} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{kl} + \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k W^{kl} W^{\frac{N}{2}l}
 \end{aligned}$$

根据式 (6.6)  $W$  的定义是

$$W^{\frac{N}{2}l} = e^{j \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} l} = e^{j\pi l} = (-1)^l$$

所以

$$G_l = \sum_{k=0}^{N/2-1} (g_k + (-1)^l h_k) W^{kl} \quad (6.11)$$

式 (6.11) 中  $(-1)^l$  之值, 是根据  $l$  是偶数或奇数而成为正值或者负值的, 所以, 首先要筛选计算  $G_l$  的一个项, 即偶数项, 这就是“频率筛选法(method of decimation in frequency)”名称的来源。即

$$G_{2l} = \sum_{k=0}^{N/2-1} (g_k + h_k) (W^2)^{kl} \tag{6.12}$$

现在，把式 (6.12) 与式 (6.5)、(6.6) 比较一下，可看出式 (6.12) 是  $\frac{N}{2}$  点的傅里叶变换形式，其次，计算  $G_l$  的奇数项，由式 (6.11) 得到：

$$G_{2l+1} = \sum_{k=0}^{N/2-1} (g_k - h_k) W^k (W^2)^{kl} \tag{6.13}$$

式 (6.13) 亦是把  $(g_k - h_k) W^k$  作为取样点之值时的  $\frac{N}{2}$  点的傅里叶变换形式。

$N$  点的傅里叶变换可以分解成二组  $\frac{N}{2}$  点的傅里叶变换，以同样的方法重复计算则  $\frac{N}{2}$  点的傅里叶变换又可以分解为  $\frac{N}{4}$  点的傅里叶变换，当顺次地进行  $n$  次重复时，就得到  $\frac{N}{2^n}$  点的傅里叶变换，最后重复到成为 1 点傅里叶变换时，必须的次数  $n$  应为：

$$\frac{N}{2^n} = 1 \tag{6.14}$$

把式 (6.14) 改写成：

$$n = \log_2 N \tag{6.15}$$

实际使用通用计算机将FFT作计算机的程序设计时，或者制成FFT的专用计算机时，可以用下面的简明图表来加以说明。

用一个  $N = 8$  时所构成的图表作为例子，图 6.3 表示式 (6.12) 的计算图。图 6.4 是表示式 (6.13) 的计算图表。图中，箭头表示数值原封不动的移动。而黑点表示把按箭头方向移来的数值相加。箭头一侧书写的数字表示按箭头方向移来的数字与写在这一侧的数字相乘之积。另外，虚线是意味着首先要变换起点值的符号然后再向前移动（见图6.4），具体地说，图 6.3 左上部的  $g_0$  右边的二个箭头集中到一个黑点后再以一个箭头出来，这个黑点就意味着是  $g_0 + g_4$  的计算。而图 6.4 中  $g_7$  右边的点意味着是  $g_3$  与  $-g_7$  之和乘以  $W^3$ ，也就是表示  $(g_3 - g_7) W^3$ 。

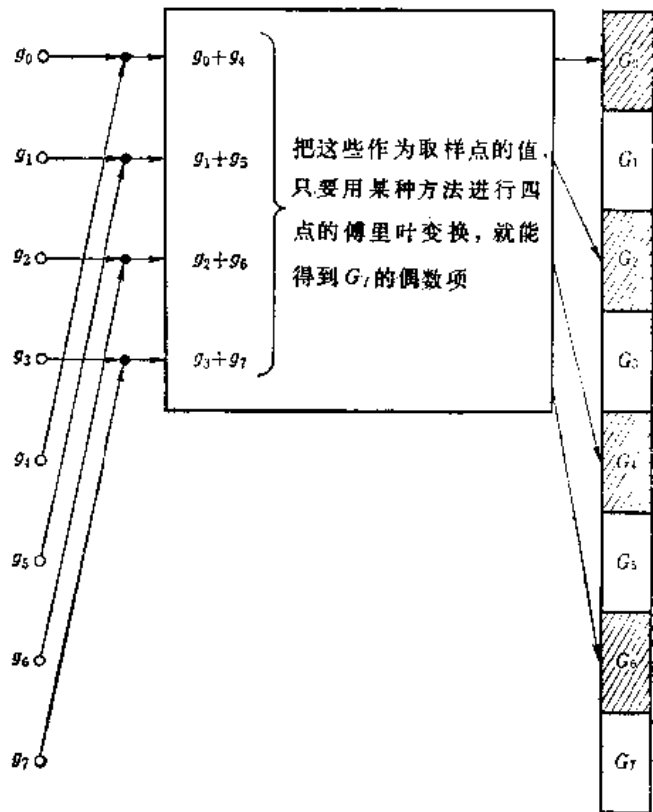


图6.3 (6.12)式的运算简图

图 6.3 表示只要对  $(g_0 + g_4)$ ,  $(g_1 + g_5)$ ,  $(g_2 + g_6)$ ,  $(g_3 + g_7)$  这四点作傅里叶变换就可以得到  $G_0, G_2, G_4, G_6$ 。而与如何进行傅里叶变换无关。所以能用图 6.3 的形式表示而图

6.4 表示大致相同类型的计算，是求  $G_1$  的奇数项的方法。

图 6.3 与图 6.4 中，方框内的傅里叶变换即使不用除此以外的任何特别方法直接进行计算，计算  $G_1$  的偶数项有  $(8/2)^2 = 16$  个。计算  $G_1$  的奇数项有  $(8/2)^2 = 16$  个。合计有 32 个计算就能完成，这是按式 (6.8) 直接计算时的必要计算数 ( $8^2 = 64$ ) 的半数。

如果要进一步使计算数减少，与上述方法相同，可将 4 点傅里叶变换改写成二组 2 点傅里叶变换。这种方法示于图 6.5 上。为了缩短取样点之值和 4 点傅里叶变换之值的表示式而设：

$$\begin{aligned} q_0 &= g_0 + g_4 & Q_0 &= G_0 \\ q_1 &= g_1 + g_5 & Q_1 &= G_2 \\ q_2 &= g_2 + g_6 & Q_2 &= G_4 \\ q_3 &= g_3 + g_7 & Q_3 &= G_6 \end{aligned}$$

也就是，经 4 点傅里叶变换后的  $q_k$  写成  $Q_k$ ，与上述方法相同，分成  $Q_k$  的偶数项与奇数项。

$Q_0, Q_2$  是  $q_0 + q_2$  与  $q_1 + q_3$  经二点傅里叶变换的结果。 $Q_1, Q_3$  是  $(q_0 - q_2)W^0$  与  $(q_1 - q_3)W^2$  经二点傅里叶变换的结果。2 点傅里叶变换是简单的，把  $N = 2$  代入式 (6.5)、(6.6)，作出取样点的和与差就能得到。图 6.5 最上面的小方框就表示连接的一例，在此方框中图 6.3 方框中的计算已全部完成，而图 6.4 方框中的计算能同样的进行，示于图 6.6 上。把图 6.5 与图 6.6 重新改变成为一个图就是图 6.7。把图 6.7 中的折线变成容易看清楚直线，取消方框中的框架，就成为图 6.8 所示的计算图表。仔细看一下图 6.8，就可以发现计算流程中除计算数不多以外，还有一大特点，例如，Ⓐ点之值  $g_0$  与 Ⓑ点之值  $g_4$  之和的计算，其计算结果存储在 Ⓐ点，而此二值之差的计算，其计算结果存储在 Ⓒ点。也就是计算的结果必定存储在被计算项所处位置的同一水平线上。其他的计

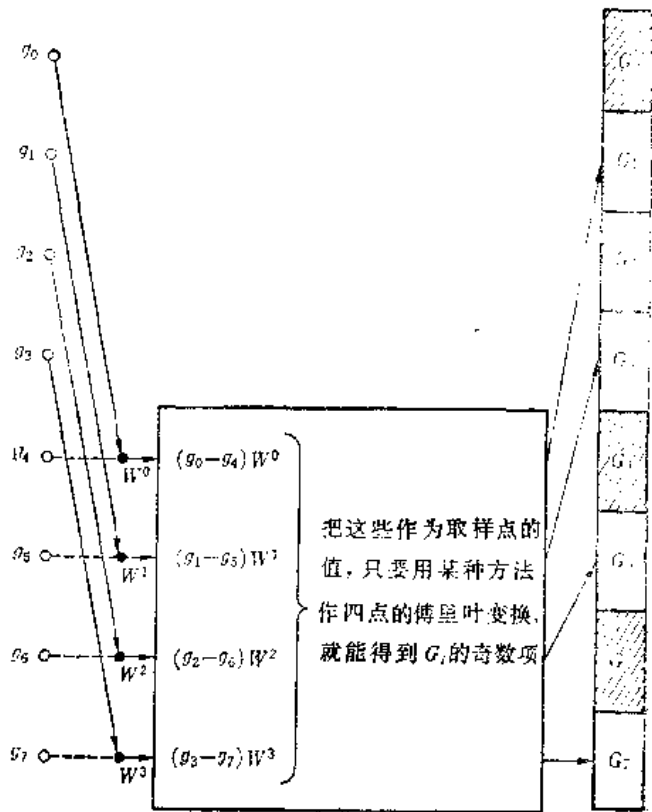


图 6.4 式 (6.13) 的运算简图

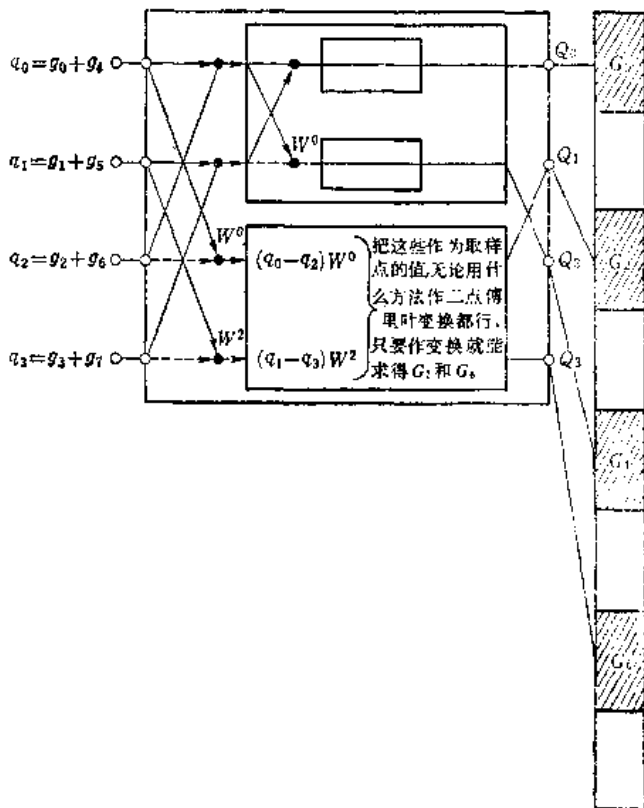


图 6.5 4 点傅里叶变换分解为 2 点的傅里叶变换



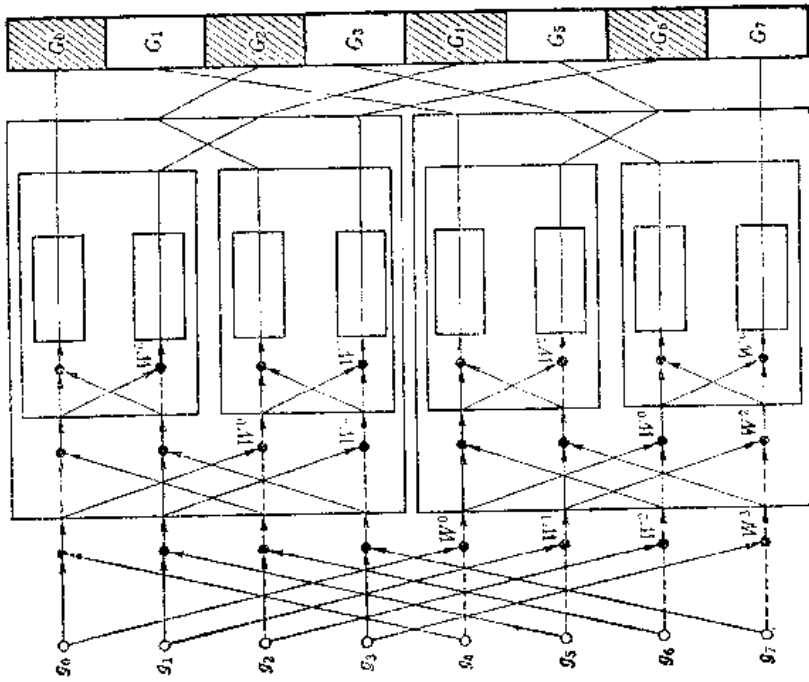


图6.7 用频率筛选法 (Decimation in Frequency) 的 8 点傅里叶变换运算图

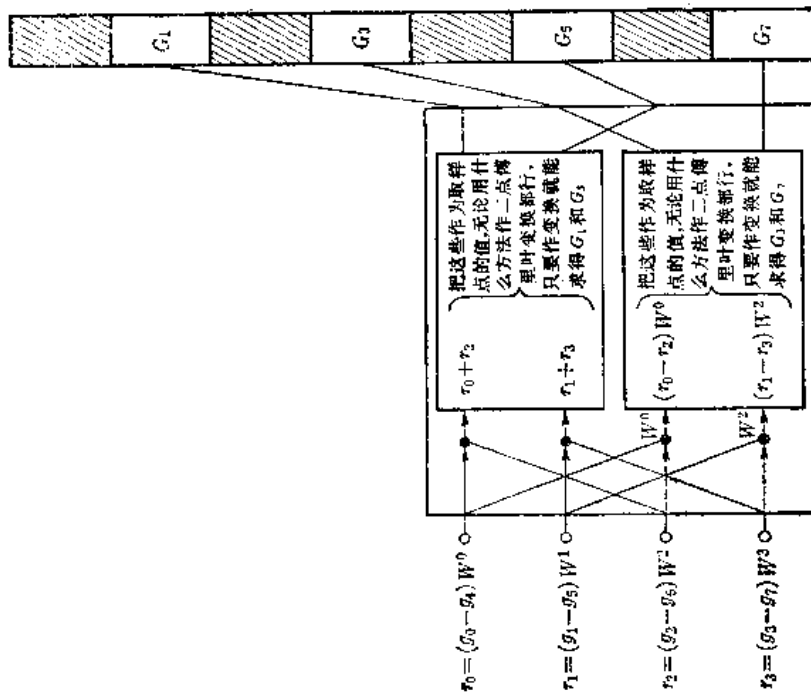


图6.8 4 点傅里叶变换分解成 2 点傅里叶变换

算也全部服从这一规律。

所以，强调这一点时的图形可将图 6.8 变换成图 6.9。图 6.9 实际上对设计制造 FFT 用的专用计算机是很有用的。

图 6.9 中的(A)(A)，(B)(B)是对应于图 6.8 的。(A)(A)(B)(B)所用线段的符号，细实线(——)与点线(---)表示输入，粗实线(——)表示这二个输入之和、虚线(---)表示这二个输入之差。(⊕)表示加法，减法的运算单元，下标  $W^k$  仅与差(虚线)之值有关，表示差值与  $W^k$  之积。把输入分成细实线与点线，在作差值计算时是必要的。因为要分清什么是减数什么是被减数，以细实线连接的输入是被减数，以点线连接的输入是减数。若用图 6.9 左上角的例子来说明，则输入之差是  $g_0 - g_4$  而不是  $g_4 - g_0$ 。用计算机运算时，输入  $g_0, g_1, \dots, g_7$ ，首先存入输入存储器(input register)，其次，把二组数，例如存储在(A)地址的值  $g_0$  与存储在(B)地址的值  $g_4$  取出，并送入运算器进行和与差的运算。这就意味着把和之值  $g_0 + g_4$  送入存储装置的(A)地址，把差值  $g_0 - g_4$  送入存储装置的(B)地址，如此三次，按图 6.9 的流程顺次进行三组运算就可以得到最后结果  $G_1$ ，包括最终值的存储在内，总共需要 4 个存储装置。可是，根据下面的理由，使用一个存储器就能完成。这也是 FFT 的主要优点。

现在举例说明：上面与(A)，(B)有关的运算是用存储在(A)地址的数值  $g_0$ 。若作  $g_0 + g_4$  与  $g_0 - g_4$  计算，则单个  $g_0$  值直到最后是完全不会再出现的，而存储在(B)地址的数值

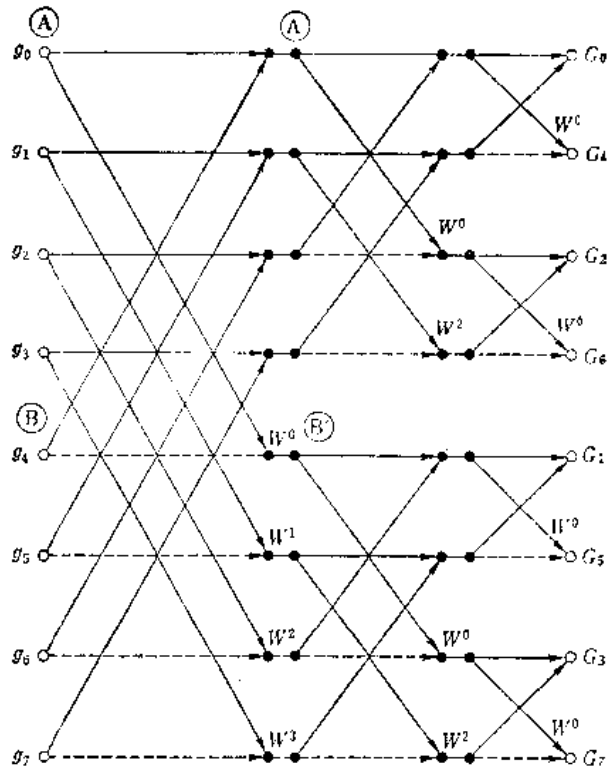


图 6.8 用频率筛选法的 8 点傅里叶变换运算这是图 6.7 的简化

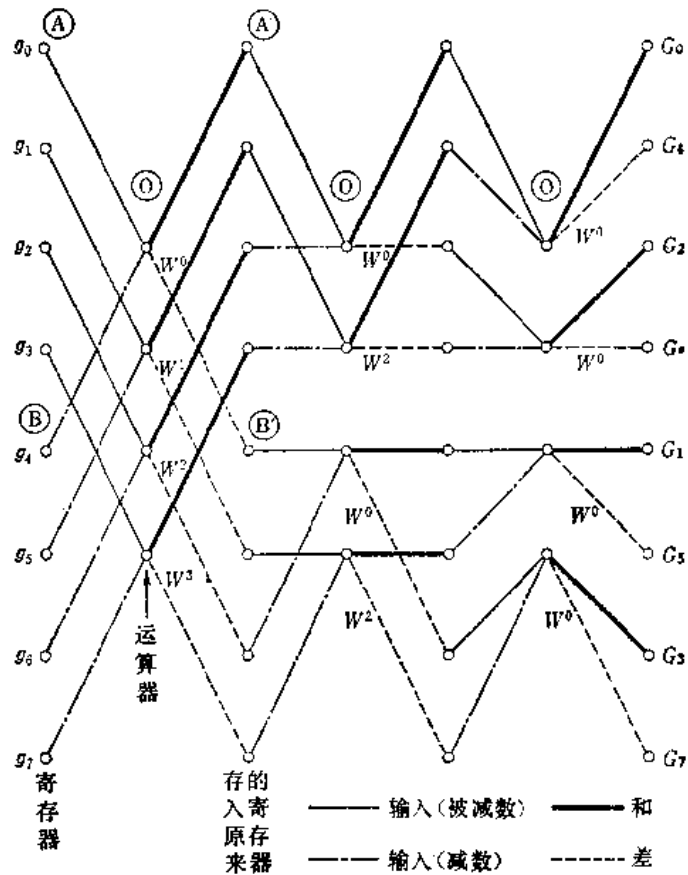


图 6.9 8 点傅里叶变换的运算图(是图 6.8 的改换)

$g_4$  在同样作  $g_0 + g_4$  与  $g_0 - g_4$  的计算时, 单个  $g_4$  值直到最后也完全不会再出现。所以, 将①运算器中得到的结果  $g_0 + g_4$  存储到④地址中而消去原有的值  $g_0$ ; 把运算结果  $g_0 - g_4$  存储到③地址中去而消去原有的值  $g_4$ , 是不会出差错的。也就是说, 由于能把数值写上数值的符号, 所以只需要最初那一行的一组存储器, 装置本身就可能非常简单。

可以看出图 6.9 上最终值  $G_i$  的排列顺序有些改变, 即变成:

$$G_0, G_4, G_2, G_6, G_1, G_5, G_3, G_7$$

当用二进制数来表示这些数时, 就成为:

$$000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111$$

把这二进制数进行逆向阅读, 即把  $\overline{110}$  逆向阅读, 读成 011。这样, 对上列数字进行逆向阅读 (bit reversal) 就成为: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111。若把这数列表示成十进制数, 就成为正确排列的顺序, 即

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

在计算机的存储器中, 不是用十进制数而是用二进制数打地址号的。所以, 在读取 FFT 结果时, 只要把“逆读” (bit reversal) 的信号送到存储器的地址中, 就能够用  $G_0$  开始的正确顺序读取  $G_i$ 。

分析一下这 8 点傅里叶变换所必须的运算数目, 图 6.9 中有三列运算器群。一列是由四个加算, 四个减算和四个乘算组成。总共由  $8 \times 3 = 24$  个加减算和  $4 \times 3 = 12$  个乘算组成。与此相对应, 若用 (6.8) 式直接作傅里叶变换, 则需要 56 个加算和 64 个乘算。可以看出, 用 FFT 即使对  $N = 8$  的情况, 运算的数目也有显著地减少。

再分析一下  $N$  点傅里叶变换时的运算数目, 将  $N$  点傅里叶变换进行到一半傅里叶变换, 必须的重叠运算次数  $n$  可由 (6.15) 式求得。一次重复计算需要  $N$  个加减算法和  $\frac{1}{2}N$  个乘法运算, 所以总的运算数为:

$$\text{FFT 的总运算数} = \frac{3}{2} \cdot N \log_2 N \quad (6.16)$$

这和直接计算相比, 能减少非常多的运算次数, 如图 6.1 所示, 而且  $N$  越大效果就越明显。

### 6.3 FFT (时间筛选法) 的原理

下面说明与上节相对应的时间筛选法 (method of decimation in time) 的 FFT 运算方法。

现在, 与前面相同设有  $N$  个取样点, 其值是  $g_0, g_1, g_2, g_3, \dots, g_{N-1}$ ,  $N$  点的傅里叶变换的频谱是  $G_0, G_1, G_2, G_3, \dots, G_{N-1}$ 。首先, 将  $g_k$  中的偶数项进行筛选, 则得:

$$f_k = g_{2k} \quad (6.17)$$

对奇数的筛选而取出得到:

$$h_k = g_{2k+1} \quad (6.18)$$

式中  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (N/2 - 1)$ 。

使用这个公式,  $N$  点的傅里叶变换可以表示为:

$$G_l = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_{2k} W^{2kl} + g_{2k+1} W^{l(2k+1)} \quad (6.19)$$

从 (6.17) 式与 (6.18) 式可得到:

$$G_l = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k (W^2)^{kl} + W^l \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k (W^2)^{kl} \quad (6.20)$$

再把  $l$  二等分成从 0 到  $N/2-1$  与从  $\frac{N}{2}$  到  $N$ , 则有:

$$G_l = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k (W^2)^{kl} + W^l \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k (W^2)^{kl} \quad (6.21)$$

$$G_{N/2+l} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k (W^2)^{k(N/2+l)} + W^{(N/2+l)} \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k (W^2)^{k\left(\frac{N}{2}+l\right)} \quad (6.22)$$

$0 \leq l \leq N/2-1$   
 $0 \leq l \leq N/2-1$

根据  $W$  的定义式 (6.6), 则有:

$$W^{Nk} = 1, \quad W^{N/2} = -1$$

于是可把  $G_{N/2+l}$  表示为:

$$G_{N/2+l} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k (W^2)^{kl} - W^l \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k (W^2)^{kl} \quad (6.23)$$

$0 \leq l \leq N/2-1$

所以式 (6.21) 与式 (6.22) 的最终值可表示为:

$$G_l = F_l + W^l H_l \quad 0 \leq l < N/2 \quad (6.24)$$

$$G_{l+N/2} = F_l - W^l H_l \quad 0 \leq l < N/2 \quad (6.25)$$

式中  $F_l$  与  $H_l$  是  $f_k$  与  $h_k$  的  $N/2$  点的傅里叶变换, 可用下式表示:

$$\left. \begin{aligned} F_l &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k (W^2)^{kl} & 0 \leq l \leq N/2-1 \\ H_l &= \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k (W^2)^{kl} & 0 \leq l \leq N/2-1 \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

式 (6.24) 表示  $G_l$  的前半部分是  $g_k$  的偶数项的  $\frac{N}{2}$  点的傅里叶变换值与  $g_k$  的奇数项的  $\frac{N}{2}$  点的傅里叶变换值乘以  $W^l$  之和。式 (6.25) 表示  $G_l$  的后半部分是这些值之差。这可以用图 6.10 的图表来表示。与上节相同, 当改写成 4 点傅里叶变换之和的形式, 再进一步改写成 1 点傅里叶变换之和的形式。图 6.11, 表示其完成图, 把图 6.11 的折线拉直画成直线就得到图 6.12。若改写成便于制成 FFT 用的专用计算机的形式, 那么就成为图 6.13 的样子。图中连接的种类其规定与图 6.9 的规定相同。

时间筛选时将输入一边逆读 (bit reversal) 一边送入存储器。致于其他的点, 可以写上存储器的符号, 这样可以节省存储器。总运算次数的减少程序与上述的频率筛选情况完全相同。

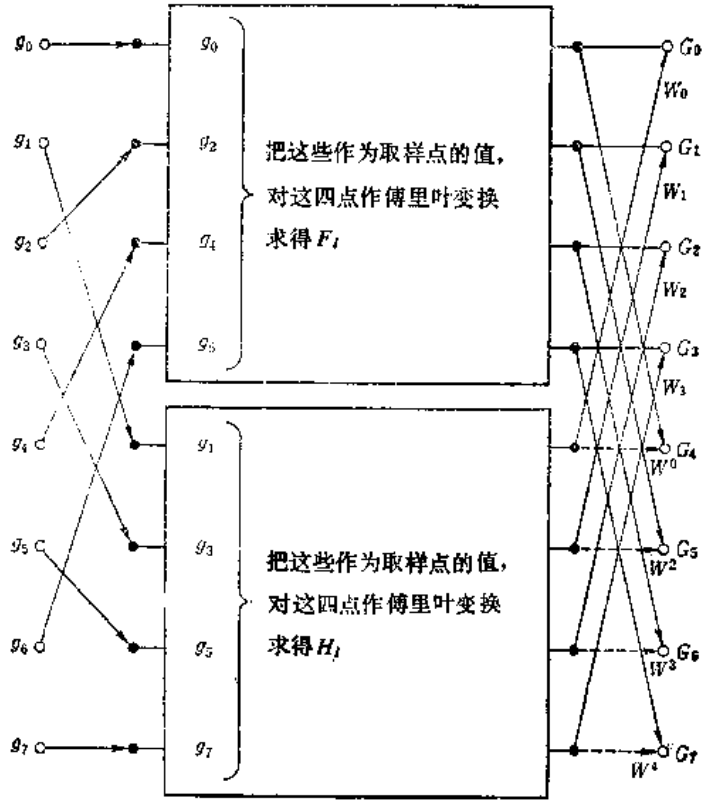


图6.10 时间筛选法的FFT其第一步是从 $g_{2k}, g_{2k+1}$ 的计算得到 $F_k, H_k$ , 第二步是把 $F_k$ 与 $H_k$ 加以组合而求出 $G_k$

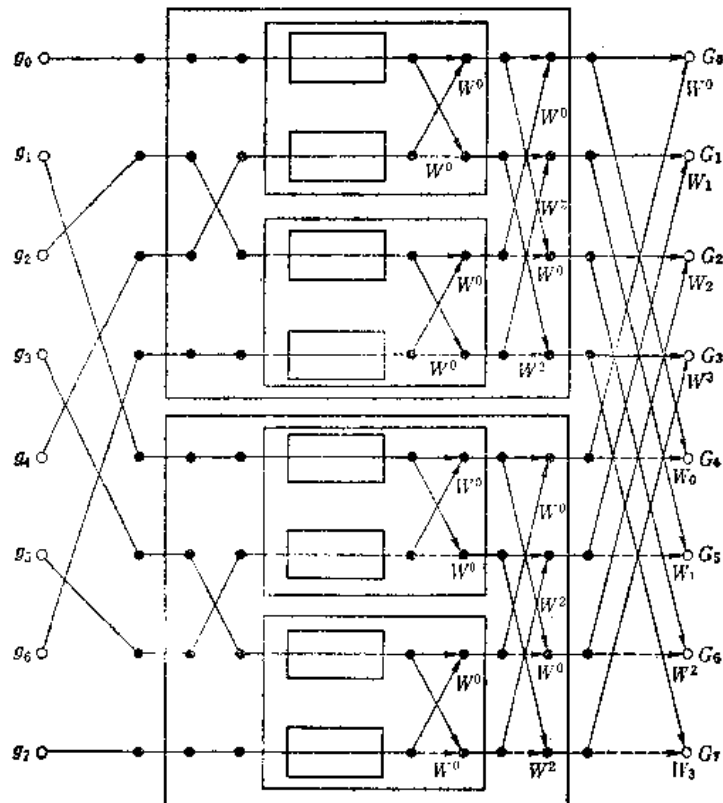


图6.11 时间筛选法计算FFT的运算流程图

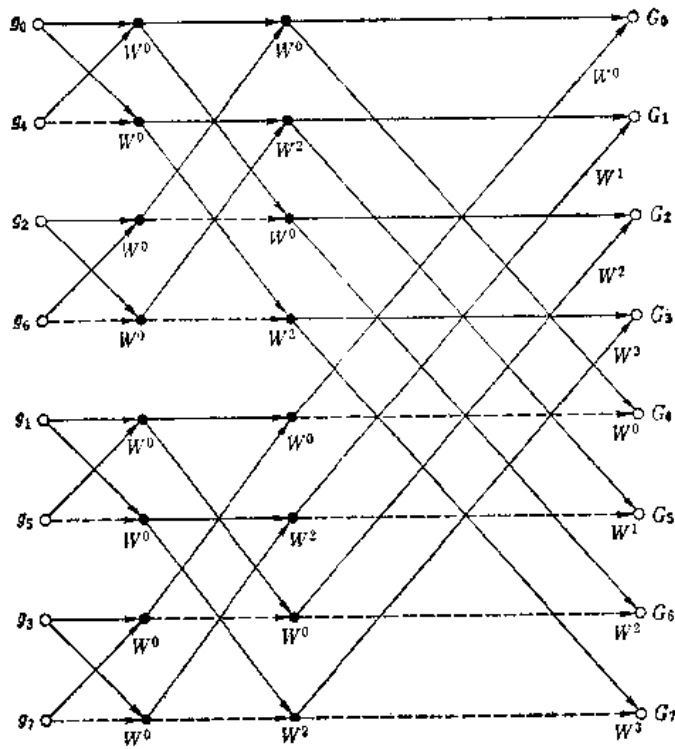


图6.12 把图6.11的折线变成直线的时间筛选法的FFT的运算流程图

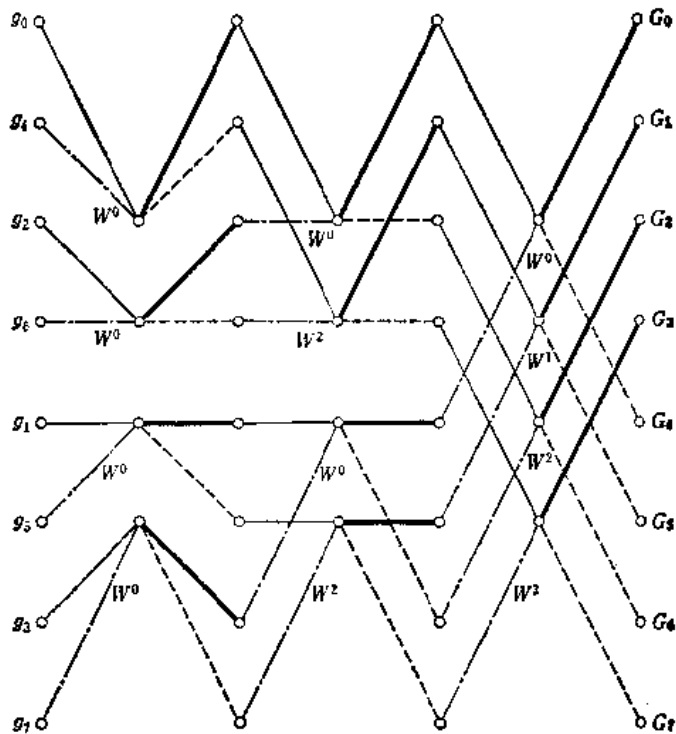


图6.13 时间筛选法的FFT运算图，此图对制成FFT专用计算机特别方便

## 6.4 $W^k$ 的运算

FFT 的专用计算机只需要有限的  $W^k$  之值,所以在固定存储器(ROM,即 Read Only Memory)中写进  $W^k$  的数表,一般不必每次运算。进行  $N$  点的傅里叶变换时,  $N$  个  $W^k$  之值是必须的。

为了方便,再一次写出  $W^k$  的定义:

$$W^k = e^{j \frac{2\pi}{N} k} = \cos \frac{2\pi}{N} k - j \sin \frac{2\pi}{N} k \quad (6.27)$$

在计算机中是用式(6.27)运算。即必须在固定存储器中求出  $2N$  个实数值的存储位置,实际上,如果很好利用  $W^k$  的性质,可以大大减少存储在固定存储器中的数。现在,用  $N=16$  这个例子来加以说明。若用复数平面上的单位圆表示  $W^k$ ,就得到图 6.14。图中对角线上的  $W^k$  之值的实数部分与虚数部分仅是符号改变而已。所以,根据  $0^\circ \sim 180^\circ$  的  $W^k$  之值就可以求得  $180^\circ \sim 360^\circ$  之值。如果进一步把  $0^\circ \sim 90^\circ$  的  $W^k$  与  $90^\circ \sim 180^\circ$  的  $W^k$  作比较,那么仅是  $\cos(2\pi/N)k$  的符号改变,所以,用  $0^\circ \sim 90^\circ$  的  $W^k$  值就足够了。另外,还可以进一步把计算数减少,即只要把  $0^\circ \sim 45^\circ$  的  $W^k$  之值的  $\cos(2\pi/N)k$  用  $\sin(2\pi/N)k$  去代替,就可以求出  $45^\circ \sim 90^\circ$  的  $W^k$  之值。其结果,固定存储器必须存储的复数只要二个 ( $W^0$  是 1 就不必去存储)。

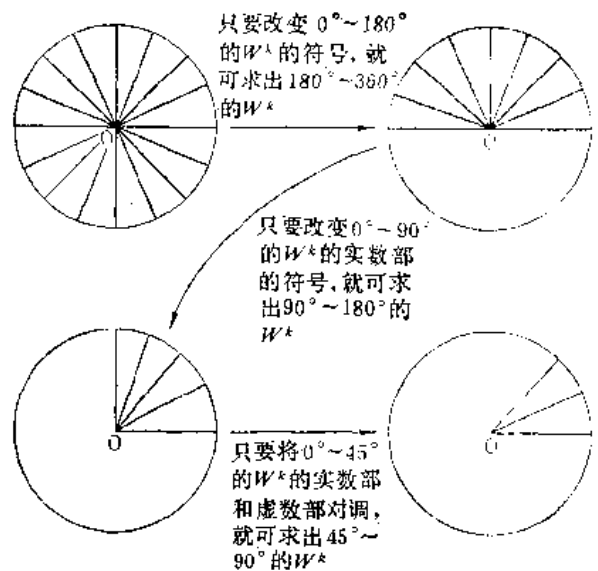


图 6.14 固定存储器存储  $W^k$  的简化

其结果,固定存储器必须存储的复数只要二个 ( $W^0$  是 1 就不必去存储)。

### 习 题

问题 6.1 有  $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7$  这些取样值,按图 6.7 用频率筛选法求取离散傅里叶频谱中的  $G_1, G_5, G_2, G_6$ 。从图 6.9 的图表中读取相应的结果,并将结果加以对照。

问题 6.2 试证明离散傅里叶变换的负频谱  $G_{-l}$  是将正频谱的后半部分如图 6.15 那样移动而得到,即证明下式成立:

$$G_{-l} = G_{N-l}$$

图 6.15 表示输入是实数时  $G_l$  的实数部分作成的曲线例子。

问题 6.3 如图 6.16 所示,  $g_k = 1$ , 用 FFT 求取 4 点傅里叶变换,并求图 6.17 所示的  $g(x)$  的傅里叶变

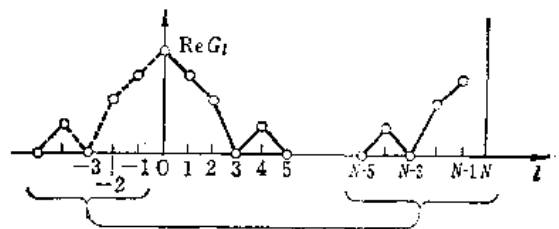


图 6.15  $G_{-l}$  之值可将后半部移动而求得

换。指出二者的相同点与不同点。

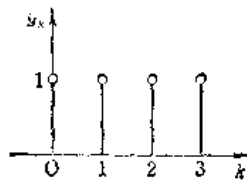


图6.16  $g_k = 1$

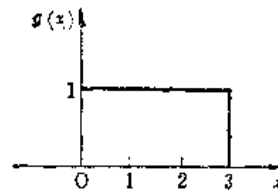


图6.17  $g(x) = 1, 0 \leq x \leq 3$

问题 6.4 将图 6.18 所示的取样值

$$g_0 = 0, g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = 0$$

作 4 点傅里叶变换。使用这个结果计算将  $g_k$  如图 6.19 那样向右移动得到的  $g'_k$  的 4 点傅里叶变换，并比较其结果。

问题 6.5 如图 6.20 所示取样值进行二个周期的重复，用图 6.9 的图表证明这 8 点傅里叶变换的频谱的半数应为零。

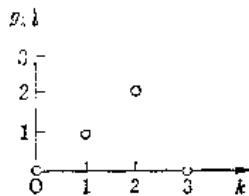


图6.18  $g_k$  之值

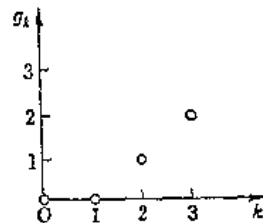


图6.19  $g'_k$  之值

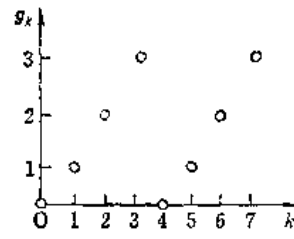


图6.20  $g_k$  之值

## 文 献

- (1) W. T. Cochran, *et al.*, "What is the Fast Fourier Transform," Proc. IEEE Vol. 55 pp. 1664~1674, 1967.
- (2) G. D. Bergland, "A guided tour of the fast Fourier transform," IEEE Spectrum pp. 41~52, July, 1969.
- (3) E. O. Brigham "The fast Fourier transform," Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- (4) J. W. Cooley, *et al.*, "Historical notes on the Fast Fourier Transform," Proc. IEEE Vol. 15, pp. 1675~1677, 1967.
- (5) B. Gold and C. M. Rader "Digital Processing of Signals" McGraw Hill Book Company, New York, 1969.



## 第七章 全息学

照相记录是用透镜记录实象的光强分布，而全息术是记录从物体来的散射光分布。

物体的形状与散射光的分布有一一对应的关系。所以只要记录散射光的分布就能全部集录与物体形状有关的信息。在集录时，通常只要把照相底板直接放在散射光中进行曝光就可以了，但这样做会把物体的位相信息丢失，因而不能再现完整的象。用X光测定晶体的构造就是一例，丢失的信息必须用化学分析等等手段来给予弥补。全息学 (holography) 为了记录位相信息，除记录从物体来的散射物体波 (object wave) 外，还要将参考波 (reference wave) 同时曝光记录在干板上，这样就解决了这个困难。

### 7.1 全息术成图的原理

考虑到物体都是点的集合体，参照图 7.1，用点状物体来加以说明。当入射波在点物体上散射时，散射波是一个扩展的球面波。波面图高起的用实线，低下的用虚线表示。同类型的线其交点是振幅的极限值，而不同类型的线其交点应为零。结果在空间形成图 7.1 (a) 所示的用粗线表示的干涉条纹或空间驻波。

照相底板置于此空间中曝光，被记录到的光强在  $a, b, c, \dots, f$ ，是暗的。在这些点的中间点是亮的条纹。这个浓淡的条纹恰好成为等间隔的带板，这就是点物体的全息图。

当物体是二个以上的点物所集成时，其全息图可认为是这些带板的重叠。用平行光照射全息图时，过带板的透过光会聚在原来的物点位置上，再现出点象，这就是全息图再现象的原理。

图 7.1 (b) 是对再现象的原理作进一步的说明。当用平行光照射全息图时，由黑点  $a, b, c, \dots, f$ ，(正视图上应是黑的同心圆，现在，在侧视图上就只能看到点) 引起散射；当黑点很小时，如图 7.1 (b) 中的  $d$  点所示，其散射在所有方向上是相同的。仅考虑其中的向  $O$  点的散射光，而在  $e$  点也有同样的散射，这时也仅考虑其中的向  $O$  点的散射光。

从图 7.1 (a) 可以看出，光程  $dO$  与光程  $eO$  之差刚好是一个波长，所以，从  $d$  点发出的波与从  $e$  点发出的波在  $O$  点处是同位相的。同样，从  $a, b, c, \dots, f$ ，等等点发出的散射波在  $O$  点也是同位相的，这个点就是再现象。

此外，在与照相底板相对应的对称点  $O'$  上，散射波的位相也是相同的，同样能够形成点物体的再现象。实际上， $a, b, c, \dots, f$ ，点的散射光强度，沿光线前进方向较强，所以，虽然  $O'$  点和  $O$  点都是实象，但  $O'$  点要比  $O$  点亮得多。当眼睛放在通过照相底板去观察的位置上，很明显，可以把  $O$  点看作虚象。就是说，假如点物体放在  $O$  点，则在  $O$  点的散射波的  $a, b, c, \dots, f$ ，点的位相分布和把再现光照射在全息图上时，全息图上的黑点  $a, b, c, \dots, f$ ，上的散射波的位相分布是完全相同的，这样，制作全息图时的位相分布就得到了再现，因此，通过全息图的再现就好像物体是真的在那里一样。

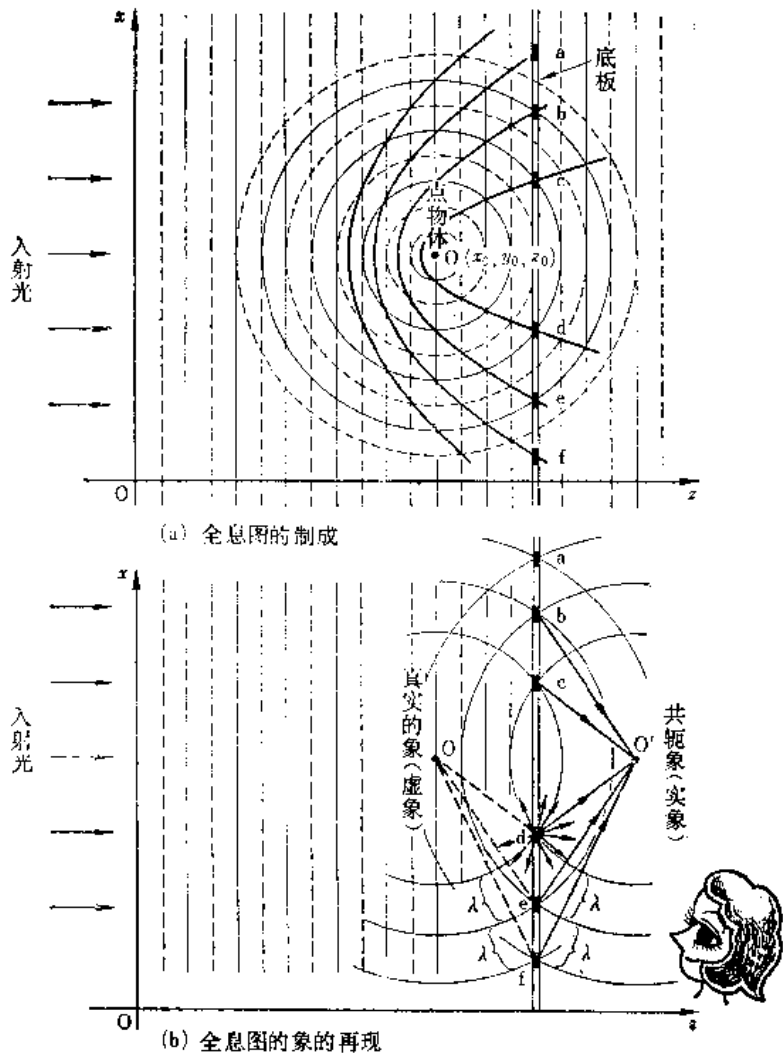


图7.1 全息术的原理

而且，在物体对全息图所张的立体角内，所有方向的散射波是同时被再现，当变动眼睛的观察位置时，向变动方向散射的光就入射到眼睛里，再现出从那个方向观察时物体的象，这就给观察者以三维的立体感。

若要问全息图究竟是什么，可以这样回答：“用照相底板挡住从物体来的散射光，原封不动的保存其光束状态，要再现其象时，只要用激光照射，使原来保存的光束再按原来前进的方向前进而看到图象”。

全息图的再现象，即使被摄物体是点物体，其散射波形成的干涉条纹也分布在干板的整个面上。因此，底板的一部分缺损，减少了干涉条纹数，也仅仅降低了分辨率，对再现象的位置以及整个的形状是毫无影响的。所以，全息图对缺损和划伤等要求是不严格的。

## 7.2 全息图的数学原理

在详细说明之前先作一概略的叙述。图7.2是形成全息图时的装置原理。从激光器出射的光线，分成照明物体的光束（物体光）与从激光器直接照射照相底板的光束（参考光）。从

物体上散射的光，即物体光 $O$ 与参考光 $R$ 同时记录在照相底板上就成为全息图。设照相底板的透过率与曝光的光通量成正比，那么，全息图的透过率分布可以表示为：

$$|O + R|^2 = |O|^2 + |R|^2 + OR^* + O^*R \quad (7.1)$$

全息图经激光（再现光）照射就产生再现象。

为简单起见，可认为再现光与参考光均为相同的平面波。从全息图上透过的光就成为：

$$|O + R|^2 R = |O|^2 R + |R|^2 R + O |R|^2 + O^* R^2 \quad (7.2)$$

现在，注意式(7.2)的第三项，由于 $R$ 是平面波， $|R|^2$ 是一个定值，所以第三项就是与物体光的分布 $O$ 成比例的透过光。也就是说，从全息图上透过的光与从物体上散射的光是同一分布。所以，对观测者来说，好象看到物体就存在在那里一样。

下面，比较详细而严格地来加以研究。设照相底板的座标为 $x, y$ ，将 $O, R$ 分别写成 $O(x, y), R(x, y)$ ，并考虑到照相底板的感光特性与对比反转等等，全息图的透过率 $t(x, y)$ 可以表示为：

$$t(x, y) = t_1(x, y) + t_2(x, y) + t_3(x, y) + t_4(x, y) \quad (7.3)$$

式中

$$\begin{aligned} t_1(x, y) &= \beta(c - |R(x, y)|^2) \\ t_2(x, y) &= -\beta |O(x, y)|^2 \\ t_3(x, y) &= -\beta R^*(x, y) O(x, y) \\ t_4(x, y) &= -\beta R(x, y) O^*(x, y) \end{aligned}$$

下面，把式(7.3)中的 $O(x, y), R(x, y)$ 之值用菲涅耳近似式来计算。

若以入射角为 $\theta$ ，入射的平行光作为参考光，则 $R(x, y)$ 可以表示为：

$$R(x, y) = R_0 e^{jkx \sin \theta} \quad (7.4)$$

设物体光为从物体形状 $o(x, y, z_0)$ 上衍射的光，使用菲涅耳近似式式(2.34)，则：

$$O(x, y) = o(x, y, z_0) * f_{z-z_0}(x, y) \quad (7.5)$$

式中

$$f_{z-z_0}(x, y) = \frac{1}{j\lambda(z-z_0)} \cdot e^{+jk[(x^2 + y^2)/2(z-z_0)]}$$

若将照相底板放置在 $z = 0$ 的平面内，照相底板上的物体波的分布就成为：

$$O(x, y) = o(x, y, z_0) * f_{-z_0}(x, y) \quad (7.6)$$

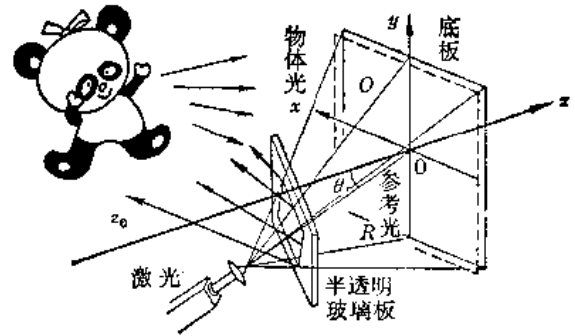


图7.2 制成全息图的装置原理

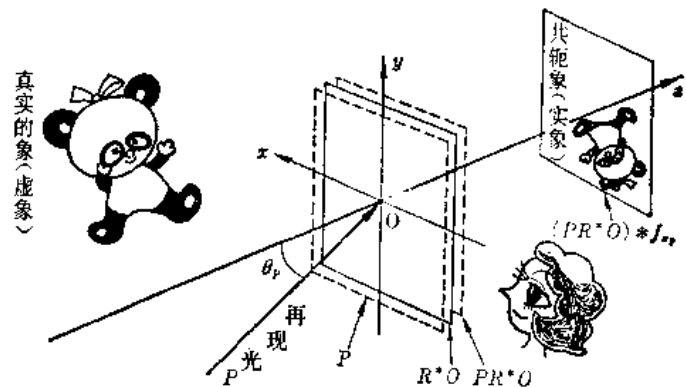


图7.3 全息图的象的再现

式中

$$f_{-z_0}(x, y) = \frac{f}{\lambda z_0} \cdot e^{-jk[z_0 + (x^2 + y^2)/2z_0]} \quad (7.7)$$

结果, 只要把式 (7.4)、(7.6)、(7.7) 代入式 (7.3) 就可以求出全息图的透过率分布。

下面, 为了产生再现现象, 用再现光 (reconstructing wave) 去照射全息图就能形成全息图的衍射象, 也就是再现现象。现在假定再现光如图 7.3 所示, 是以入射角为  $\theta_p$  入射的平面波, 再现光可用下式表示:

$$P(x, y) = P_0 e^{jkx \sin \theta_p} \quad (7.8)$$

如果用此再现光照射具有式 (7.3) 透过率的全息图时, 其衍射象从式 (2.34) 可以得到:

$$E(x_i, y_i) = [P(x_i, y_i) t(x_i, y_i)] * f_{z_i}(x_i, y_i) \quad (7.9)$$

在计算式 (7.9) 时,  $t(x, y)$  由 4 项组成, 而  $t_1(x, y)$  是与直接透过光有关系的项,  $t_2(x, y)$  是与噪声有关的项,  $t_3(x, y)$ 、 $t_4(x, y)$  式中有  $O(x, y)$  的因子, 因此, 这是与象有关的项。

先开始计算与  $t_3(x, y)$  有关的项, 由式 (7.3)、(7.4)、(7.6)、(7.7) 及 (7.8) 有:

$$\begin{aligned} E_3(x_i, y_i) &= -\beta [P(x_i, y_i) R^*(x_i, y_i) O(x_i, y_i)] * f_{z_i}(x_i, y_i) \\ &= -\beta P_0 R_0 [e^{jkx_i(\sin \theta_p - \sin \theta_r)} \{o(x_i, y_i) * f_{-z_0}(x_i, y_i)\}] * f_{z_i}(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (7.10)$$

为了使式 (7.10) 简单化, 连续进行傅里叶变换与反变换而得到:

$$\begin{aligned} E_3(x_i, y_i) &= -\beta P_0 R_0 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left[ \delta \left( f_x - \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. * \{ \bar{o}(f_x, f_y) \cdot F_{-z_0}(f_x, f_y) \} \right] \cdot F_{z_i}(f_x, f_y) \right\} \\ &= -\beta P_0 R_0 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \bar{o} \left( f_x - \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda}, f_y \right) \right. \\ &\quad \left. \times F_{-z_0} \left( f_x - \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda}, f_y \right) \cdot F_{z_i}(f_x, f_y) \right\} \end{aligned} \quad (7.11)$$

利用式 (2.39) 的关系可得到:

$$\begin{aligned} E_3(x_i, y_i) &= -\beta P_0 R_0 e^{-jk(z_0 - z_i) + j\pi\lambda z_0 \left( \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda} \right)^2} \\ &\quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \bar{o} \left( f_x - \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda}, f_y \right) \cdot e^{j\pi\lambda(z_0 - z_i)(f_x^2 + f_y^2)} \right. \\ &\quad \left. \times e^{-j2\pi z_0(\sin \theta_p - \sin \theta_r) f_x} \right\} \end{aligned} \quad (7.12)$$

式中

$$\mathcal{F}\{o(x, y)\} = \bar{o}(f_x, f_y)$$

当  $z_i = z_0$  时, 式 (7.12) 成为:

$$\begin{aligned} E_3(x_i, y_i) &= -\beta P_0 R_0 e^{j\pi\lambda z_0 \left( \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda} \right)^2} \\ &\quad \times \left\{ o(x_i, y_i) e^{j2\pi \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda} x_i} \right\} * \delta[x_i - z_0(\sin \theta_p - \sin \theta_r)] \\ &= -\beta P_0 R_0 e^{j2\pi \frac{\sin \theta_p - \sin \theta_r}{\lambda} \left[ x_i - \frac{z_0(\sin \theta_p - \sin \theta_r)}{2} \right]} \\ &\quad \times o\{x_i - z_0(\sin \theta_p - \sin \theta_r), y_i\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

从这结果中可以看出, 在  $z = z_0$  平面内形成再现现象。但是, 再现现象在  $z$  轴方向其位置不发生变化, 在  $x$  轴方向其位置只移动  $z_0(\sin\theta_p - \sin\theta_r)$ 。当  $\theta_p = \theta_r$  时, 即把与参考光相同的波面作为再现光时, 可以看出再现现象的位置就是制作全息图时的物体位置。

以上是关于全息图有效象 (true image) (虚象) 的再现过程说明。把式 (7.3) 中的  $t_1(x, y)$  的有关项作同样处理, 得到与式 (7.12) 相应的公式:

$$E_4(x_i, y_i) = -\beta P_0 R_0 e^{jk(z_0 + z_i) - j\pi\lambda z_0 \left(\frac{\sin\theta_p + \sin\theta_r}{\lambda}\right)^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \bar{o} * \left( -f_x + \frac{\sin\theta_p + \sin\theta_r}{\lambda}, -f_y \right) e^{-j\pi\lambda(z_0 + z_i)(f_x^2 + f_y^2)} \times e^{i2\pi z_0(\sin\theta_p + \sin\theta_r)f_x} \right\} \quad (7.14)$$

特别在  $z_i = -z_0$  的平面内, 有:

$$E_4(x_i, y_i) = -\beta P_0 R_0 e^{j2\pi \frac{\sin\theta_p + \sin\theta_r}{\lambda} \left[ x_i + \frac{z_0(\sin\theta_p + \sin\theta_r)}{2} \right]} \times o \left[ x_i + z_0(\sin\theta_p + \sin\theta_r), y_i \right] \quad (7.15)$$

也就是在  $z_i = -z_0$  处将再现出全息图的共轭象 (conjugate image) (实象)。共轭象是有效象在全息图的相反另一侧形成的实象, 是光线实际会聚的地方。在这个位置上放置屏幕, 象就可以投影显示在其上面。

以上结果可以汇总在图 7.4 上。在式 (7.13), (7.15) 中其负号表示再现现象的位相与从物体出射的光的位相相比, 具有相反的位相。但是, 由于人的眼睛是不能觉察位相的, 因而就不能对二者进行区分。

式 (7.3) 中的噪声项  $t_2(x, y)$ , 大概是物体光空间频率的二倍, 所以其衍射方向, 大概是从全息图看物体的角度的二倍方向。这样, 就有可能去选择  $\theta_r$ ,  $\theta_p$  使噪声项不与有效象或共轭象重合。

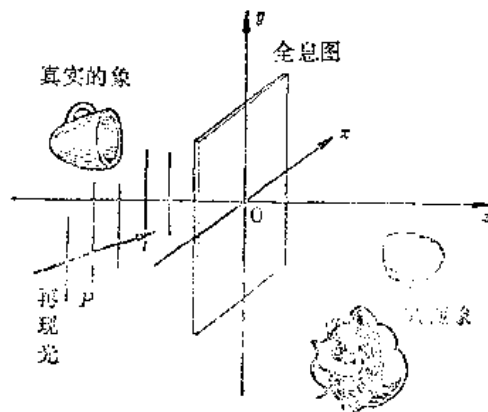


图7.4 全息图的制成

### 7.3 再现光的入射角与象亮度的关系

由于照相底板的厚度关系, 再现现象的亮度就由再现光的入射角决定。照相底板其断面沿物体光与参考光形成的波面如图 7.5 所示, 是呈窗帘形状的感光层列。

这些感光面如图 7.6 所示位于物体光与参考光交角的二等分平面内 (参考 1.4 节)。例如, 图中  $M_0$  点的反射感光面处于物体光的前进方向  $\overline{OM_0}$  与参考光的前进方向  $\overline{RM_0}$  的交角的二等分平面内。

全息图在再现光照射下, 光线将向所有方向散射, 但感光面好象小的镜面排列, 所以与再现光入射角同方向的散射光 (把感光面看作全反射面时的反射方向), 就特别强。

所以, 只要把全息图放回原来的制作位置, 并把原来使用的参考波原封不动的作再现光

使用就可以得到明亮的再现现象。在这种情况下，反射面  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  产生的散射光全部在散射光最强的方向，所以比用其他位置的任意的再现光所产生的再现现象亮度要大得多。

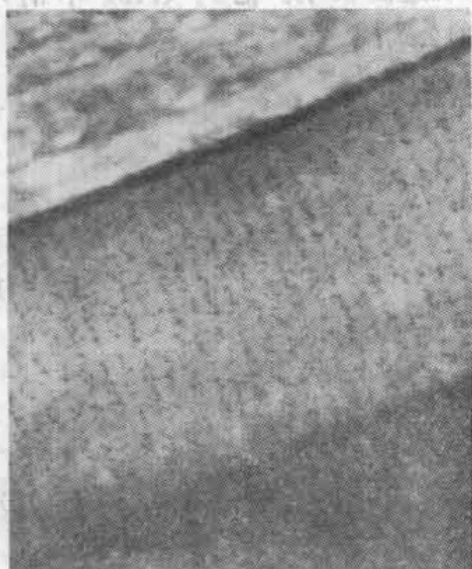


图7.5 Kodak469F照相底板断面的电子显微镜照片 (M. Akagi, T. Kaneko以及T. Ishiba)

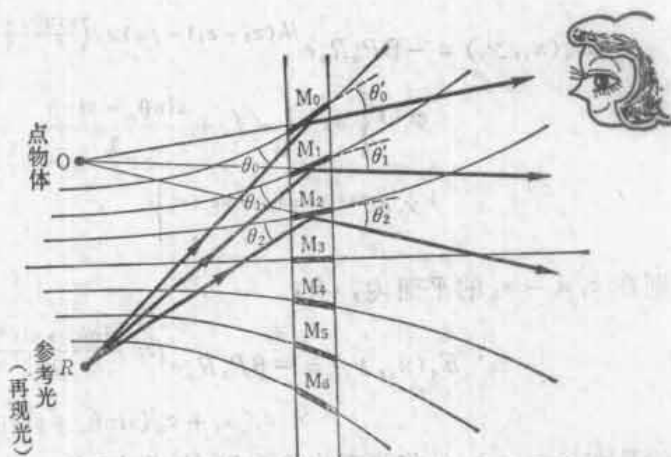


图7.6 有厚度的全息图的再现现象

## 7.4 全息图按波面的分类

全息图按制作时照相底板上的光分布来分类，可以分成：（1）菲涅耳全息图，（2）傅里叶变换全息图，（3）成象全息图，（4）无透镜全息图。

### 7.4.1 菲涅耳全息图

当照相底板上的物光束的光分布为物体面上光分布的菲涅耳区域内的衍射波时，这种全息图就称为菲涅耳全息图。最基本的全息图就是这种类型，本章中到现在为止所叙述的都是这种全息图。

### 7.4.2 傅里叶变换全息图

这种全息图是把照相底板上的物光束的光分布进行物体面上的光分布的傅里叶变换。要形成傅里叶变换值其方法之一是把物体置于很远的地方，但距离很长是不现实的，所以采用图 7.7 (a) 所示的方法，在透镜的后焦面上放置照相底板来制成。

当使用平面波的再现光时，象成在无限远，所以一般使用透镜来进行傅里叶变换从而得到近处的再现现象。

从图 7.7 (a) 知道，有关物光束的信息集中在后焦面上，所以，要接收物光束的信息，照相底板面积可以比其他方法小，因而这种方法能很有效地用于超密度记录上。

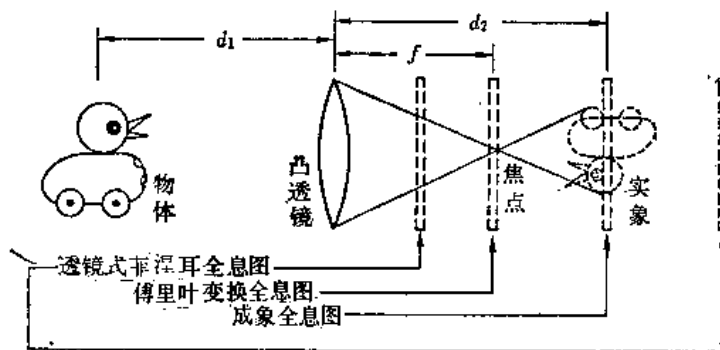
### 7.4.3 成象全息图

如图 7.7 (a) 所示的将照相底板置于成象面上制成的全息图叫做成象全息图。这种全

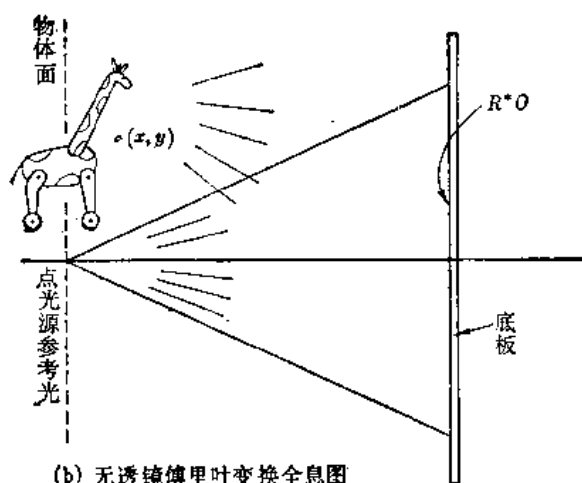
息图由于从全息图到再现象之间距离较近,所以再现光的相干性要求可以放宽,这是其特征。例如,用不同的二种波长来制作全息图,用其中的一个波长来再现,形成两个位置错开的象,其位置偏移的大小,可以从离全息图越远象的偏移越大这个事实来推测。

#### 7.4.4 无透镜傅里叶变换全息图

如图 7.7 (b) 所示,当使用置于物体同一平面内的点光源作为参考光,则照相底板上的  $OR^*$  分布成为物面上光分布的傅里叶变换,这样就能够不用透镜而制成傅里叶变换全息图。这种全息图就叫做无透镜傅里叶变换全息图。下面,用数学公式来加以说明,设所用作为参考光的点光源其位置是  $(0, 0, z_r)$ , 则有



(a) 傅里叶变换全息图·成象全息图,  
透镜式菲涅耳全息图



(b) 无透镜傅里叶变换全息图

图7.7 全息图按波面的分类

$$OR^* = \frac{R_0^*}{i\lambda z_r} [o(x, y) * f_{-z_0}(x, y)] e^{ikhz_r + ik(x^2 + y^2)/2z_r} \quad (7.16)$$

或者

$$OR^* = \frac{R_0^*}{(\lambda z)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [o(\xi, \eta) e^{-ik(\xi^2 + \eta^2)/2z}] e^{i2\pi(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (7.17)$$

式中

$$z_r = z_o = z \quad (7.18)$$

对于  $OR^*$  可以进一步写成:

$$OR^* = \frac{R_0^*}{(\lambda z)^2} \mathcal{F}\{o(x, y) e^{-i k(x^2+y^2)/2z}\} f_x = -\frac{x_i}{\lambda z}, f_y = -\frac{y_i}{\lambda z} \quad (7.19)$$

可以看出,  $OR^*$  是  $o(x, y) e^{-i k(x^2+y^2)/2z}$  的傅里叶变换, 这种全息图原来就具有傅里叶变换全息图的性质。

## 7.5 计算全息图

由上面的叙述知道, 如果要决定一个物体的形状, 可以从这个物体发出的散射光的分布用数学公式计算出来。因此, 反过来不利用光线而用计算来求散射光分布, 根据计算的结果来描画出浓淡的图形, 然后再用缩小的摄影制成全息图。当用激光照射这个全息图时, 人眼就能看到其再现象。用这种方法, 可以直接由设计图得到三维形状的实物。

计算全息图大致可分为:

- (I) 记录分布函数的振幅和位相的方法。
- (II) 记录参考光与物体光之和的绝对值的平方的方法。
- (III) 调制开孔位置的方法。
- (IV) 调制开孔大小与位置的方法。
- (V) 使用等间隔开孔的方法。
- (VI) 计算机只用于制成物体示意图的方法。

首先, 方法 (I) 是用计算机计算全息图面上的函数, 例如式 (7.3) 的  $t_s(x, y)$ , 当计算结果用复函数来表示时, 其形状为:

$$t_s(x, y) = A(x, y) e^{i\phi(x, y)}$$

把振幅分布  $A(x, y)$  与位相分布  $\phi(x, y)$  分别记录在照相底板上, 重叠后用激光照射就能再现出象来。

$A(x, y)$  的记录比较容易, 只要去加减照相底板上的浓淡就可以得到。而  $\phi(x, y)$  的记录就要麻烦一些, 必须把浓淡图拍成照片, 显影后再漂白, 根据颜色深浅引起折射率变化, 用经验加减其浓淡而得到符合  $\phi(x, y)$  位相的图样。

二块照相底板中仅利用  $\phi(x, y)$  这块照相底板也能形成再现象, 故仅有  $\phi(x, y)$  的全息图就特别称为相衍照片 (Kinofilm) 或称为开诺全息照片。

方法 (II) 与一般制作全息图的原理相同, 用计算机计算下式:

$$|R(x, y) + O(x, y)|^2$$

然后再描出与计算结果成正比的浓淡图形, 并加以缩小摄影而制成全息图, 当使用激光时象就得到再现。与方法 (I) 相比, 象变得暗一些, 由于只使用一块照相底板, 因此, 制造简单, 方法 (I), (II) 用计算机所制成的全息图, 是用光束来再现, 但使用声波或者微波的全息图, 是测定其强度分布并直接与计算机联接, 用计算机来求出其再现象。

下面, 对方法 (III) 作说明。这种方法是在不透明的掩模上开孔, 适当选择开孔的位置可以近似的得到所要求的位相分布的波前。这样, 就不必象方法 (I), (II) 那样作浓淡的分布, 而且, 由于只要开相同大小的孔, 所以在制造上也比上述二种方法简单。下面, 用图 7.8 来说明其原理, 放置在  $z = z_0$  平面上的不透明掩模用入射角为  $\theta$  的平面波来照射, 这时,



其光分布用下式表示，

$$Ae^{ikx \sin \theta} \tag{7.20}$$

设  $x$  轴的位相分布用图 7.8(b) 表示，随着  $x$  的增加，位相值在  $-\pi$  与  $\pi$  之间作周期性的变化。

如果在所希望的位相的对应位置上开孔，就能够得到具有这个位相的点光源。例如，图 7.8(b) 在离开掩模原点  $\frac{1}{4}$  周期处开孔，所得的点光源与开于原点的点光源的位相相比刚好差  $\frac{\pi}{2}$  的位相。图 7.8(c) 表示每周期内开一个孔，即  $a, b, c, \dots, f$  时，能得到图 7.8(d) 所示的具有  $a'', b'', c'', \dots, f''$  的位相的点光源列。

这种方法其全息图仅记录物光束  $O(x, y)$  的位相分布，所以是一种相衍式全息图，即开诺全息图。

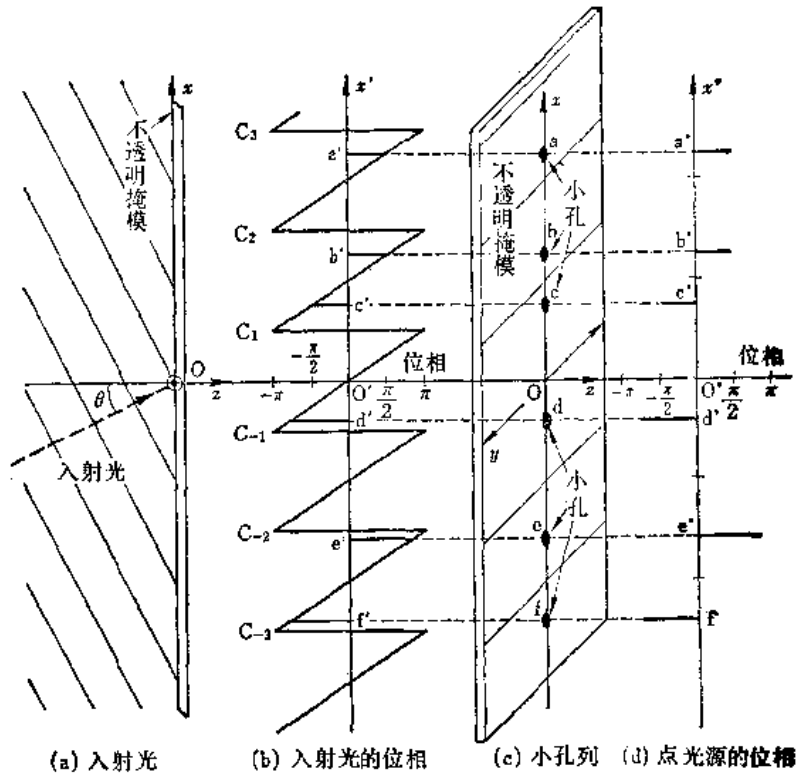


图 7.8 位置调制的孔列形成计算机全息图的原理

方法 (IV) 是方法 (III) 的改进。这种方法不仅能记录位相而且记录振幅，用与图 7.8(c) 所示的同样的开孔  $a, b, c, \dots, f$  来制成全息图，但孔的大小与这个位置的振幅成正比。

方法 (III), (IV), 其区间内开孔位置应根据该点的位相值变化而变化。下面叙述方法 (V), 这是在一个区段内开 4 个等间隔的孔而制成的全息图。孔与孔之间的间距是一定的，所以，计算机的同步给定简单，而且其间距正确，这是其特点。如图 7.9(a) 所示，当用入射角  $\theta$  的平面波照射透明的掩模时，其位相分布如图 7.9(b) 所示是周期函数。当把孔开在一个位相区域上，其相应距离成四等分的点上，如图 7.9(c) 所示。开孔的大小由透过这些孔的光振幅与  $g_1, g_2, g_3, g_4$  成正比的变化来决定。如果原点的位相是零，这样四点的位相分别应为  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \left(\frac{3}{2}\right)\pi$ ，所以从这四个点出射的光，其合成应是：

$$g = (g_1 - g_3) + j(g_2 - g_4) \tag{7.21}$$

通过适当改变这 4 个开孔的大小，就能够表示任意的复数。用这种方法记录物光束  $O(x, y)$  的分布就能制成全息图。

图 7.10(a) 是这种方法制成全息图时所用的原图。图 7.10(b) 是这个全息图的再现象。首先将原图分割成  $128 \times 128$  个象素，每个象素按浓淡数字化以后送入计算机，计算物光束的光分布，将计算结果用方法 (V) 开孔，就得到这种结果。

四

方法(Ⅲ), (Ⅳ), (Ⅴ)的再现象其清晰度是由开孔数所决定, 要得到清晰的象必须的开孔数一般要非常多, 这样, 计算机的计算量就变得很大。例如, 要得到图 7.10(b) 的图形, 必须存储 131072 字, 计算机的负担过大。现在的一个解决办法是用实际光的衍射分布, 计算机仅计算由于观察角不同而引起的象的变化, 这就是方法(Ⅵ)。用这种方法其运算量与前面的方法相比, 可以削减到  $\frac{1}{1000}$  以下。

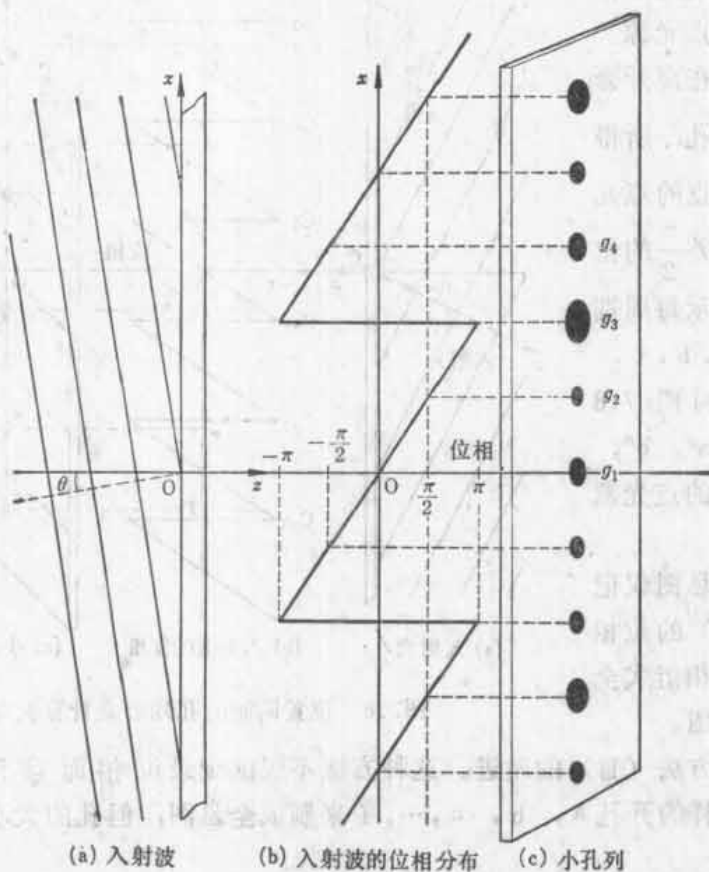


图7.9 等间隔小孔列的计算机全息图



(a) 制造计算全息图所使用的原图 (b) 计算全息图的再现象

图7.10 等间隔孔列所产生的计算全息图

下面对方法 (VI) 作一些介绍, 实际上看全息图的再现现象时, 总只使用有限部分的全息图, 如图 7.11 所示。当眼睛置于 A 点时, 再现现象完全由全息图的 a-a' 这部分决定, 当眼睛的位置移到 B 点时, 象完全由全息图上的 b-b' 这部分决定。利用这点, 可以由设计图直接作出成品全息图。

计算机根据设计图的信息, 计算 A 点所看到的图形, 并将它描画在底片上, 若可以计算 A 点所见到的图形, 那么从 B 点所见到的图形计算只要作坐标旋转计算就可以了。同样眼睛稍稍移动到 C, D, E 这些位置所见的图形也可顺次描画在底片上, 将这些所见图形如图 7.12 所示那样和参考光一起, 顺次记录在稍有隔开的照相底板的各个部分内, 就完成了—块全息图的制造。用再现光去照射这个完成的全息图, 眼睛位置连续地移动时, 就再现出从眼睛位置所看见的

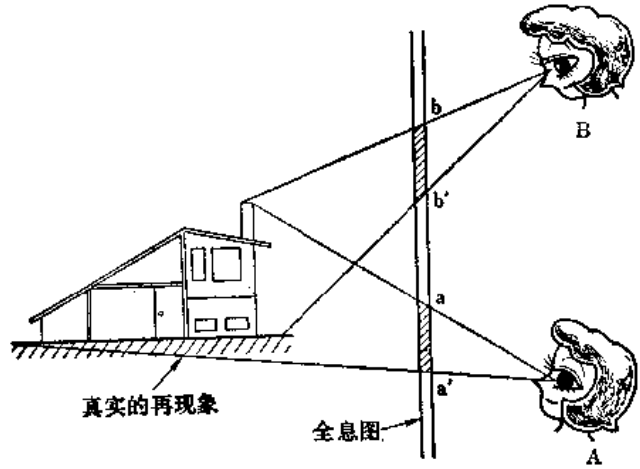


图7.11 全息图的象的有用部分

再现现象; 所以有立体感。这种全息图的缺点是当眼睛放在计算所设定的位置以外时, 象质就变坏。图 7.13 是用这种方法所作全息图的再现现象, 无规则放置的线束就是物体。

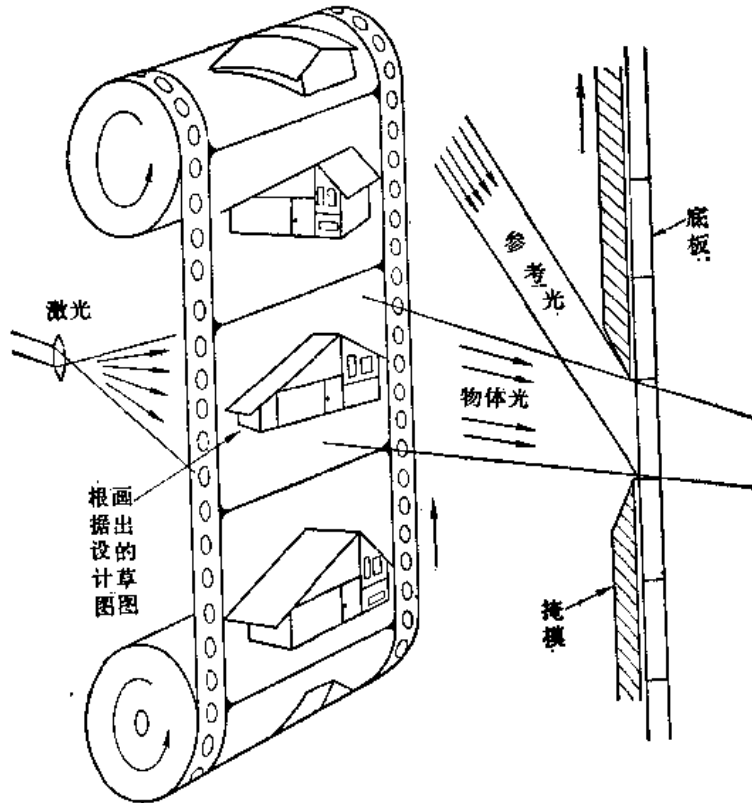


图7.12 将每次少许改变观察角所见的图顺次记录在全息图的各部分内而制成全息图

用这种方法作草图时使用了计算机，但计算机并不是必不可少的。使用适当间隔的观察角，用白光连续拍摄成的照片也同样能达到。这就是说，只要应用这个原理，由白光拍摄的照片也能制成全息图。

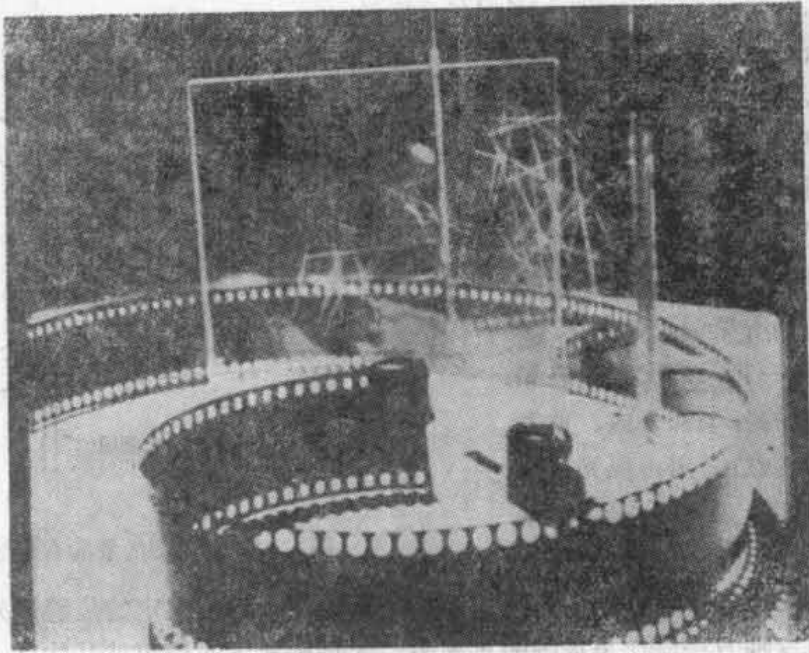


图7.13 计算机仅用于作成物体草图的方法 (Bell电话实验室)

## 7.6 全息术的应用

全息术的原理已渗透到各个领域，其应用范围很广，下面主要从原理上说明这些应用。致于微波器械与信息处理方面的应用则在下面的另一章中叙述。

### 7.6.1 超焦深摄影

当使用全息图观察游动微生物与微粒子时，有一般方法得不到的优点。使用普通显微镜进行观察时，由于显微镜焦深非常小，当物体运动时，要跟踪物体进行调焦几乎是不大可能的。

然而，全息图能够将远距离到近距离的物体同时记录，所以，一旦制成一张全息图，从全息图的再现象中由近距离的象到远距离的象都可以在静止状态下逐次的来进行观测。

图7.14，是这种原理的应用。图中记录的是深水槽中游动的浮游生物运动的例子。从工程的角度上，首先，如图7.14(a)所示，把35毫米微粒底片放入摄影机中并以每秒约70幅的速度，用脉冲激光连续作出全息图。其次，如图7.14(b)所示，作出每一幅全息图的再现象，再把显微镜的焦点逐次对准那幅中某特定的浮游生物的再现象而进行记录。图7.14(c)表示这种方法所得的6幅显微镜的照片。

### 7.6.2 超密度记录

在记录实象的基础上，如果底片损伤，损伤部分的记录就完全丢失。所以，对图书，刊物等用超密度方法将其记录在微粒底片上时，底片上的微小灰尘与擦伤必须极度的注意。但是，作全息图记录时，损伤的影响只是增加了整个噪声的大小，而记录的特定部分不会完全

丢失。从理论上说，不论是实象记录或者是全息图记录其最高记录密度是不变的。图 7.15 是把 800 个字记录在 0.7 毫米的全息图上的象，可计算出 1 毫米<sup>2</sup>记录 2000 个字。

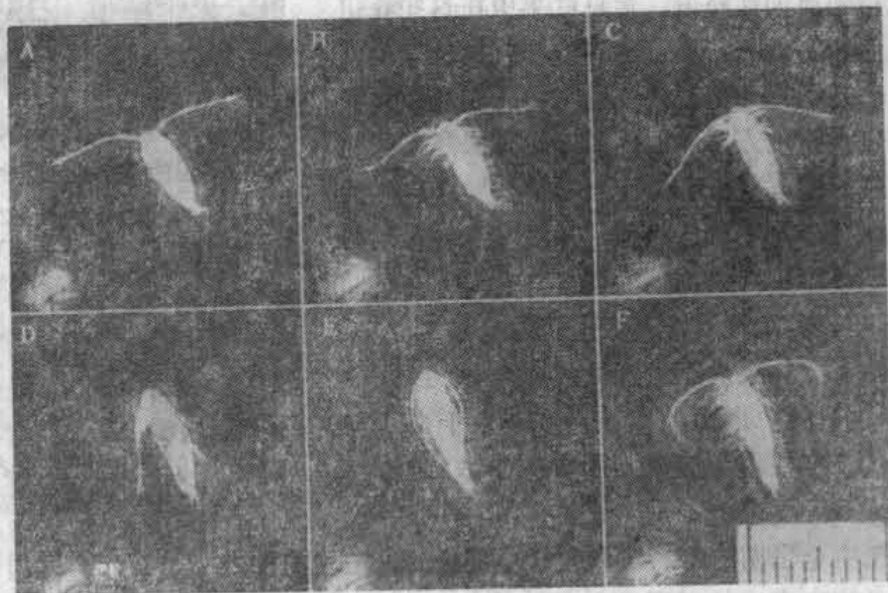
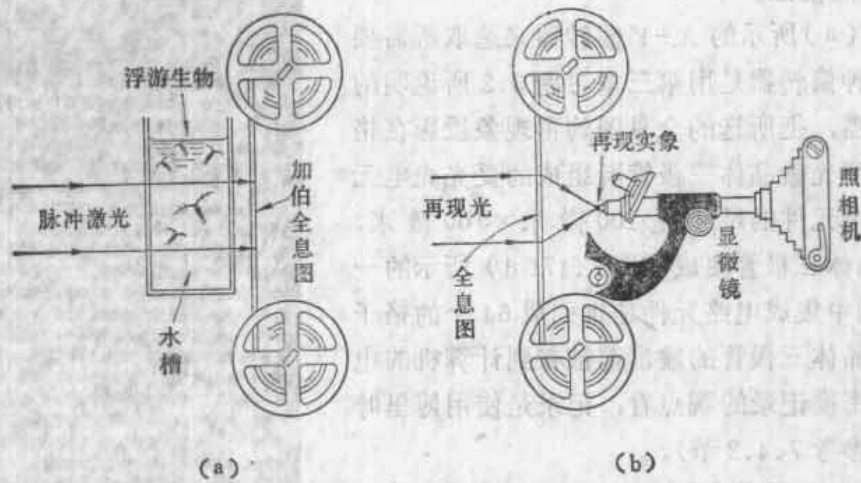


图 7.14 利用全息图具有较大焦深的特点而对浮游生物的运动作记录所用的装置及获得的结果

(a) 制成连续的全息图 (b) 逐次对焦在全息图的各幅再现象上而得到的显微镜照片

(c)  $\frac{1}{70}$  秒间隔内浮游生物的活动。左上角上的亮点是显微镜焦面外的其他微生物，当显微镜对焦在比微生物上时，微生物的像清楚而浮游生物的象就模糊

### 7.6.3 计算机用的光学存储装置

用于计算机的二进制“0”与“1”的记录方法之一是用图 7.16 所示的黑与白的图样来进行。

计算机的只读存储器 (Read Only Memory 或 ROM) 使用这种图样时其实例示于图 7.17。只读装置的全部机构示于图 7.17(a) 上。存储用照相底板示于图 7.17(b)，是由  $32 \times 32$  个小的全息图阵列组成。这里面的一个小全息图的再现象示于图 7.17(c)，再现象由分成  $8 \times$



8个区间的图样构成,各个区间又由 $8 \times 8$ 位白点和黑点构成。此图由63位(bit)“1”(四周的白点)与1位“0”(中央的黑点)组成,所以,这样一块存储用照相底版总共可以存储约 $4.2 \times 10^6$ 位的信息。

用图7.17(a)所示的X-Y偏转器来选取所需要的全息图。这种偏转器是用第三章习题3.2所说明的超声波光偏转器,把所选的全息图的再现象投影在格子状排列的小型光敏晶体三极管所组成的受光光电元件上。每个光电元件的尺寸是100微米 $\times$ 100微米,共64个光敏晶体三极管集成在图7.17(d)所示的一块基板上。此例中集成电路元件是排列成64个的格子状,各个光敏晶体三极管的输出都被接到计算机的电路中去,从超密度记录的观点看,记录是使用傅里叶变换全息图(参考7.4.2节)。

如图7.17(b)那样把周期性很强的图形作傅里叶变换时就得到周期性峰值,信息就集中在这些峰值中,峰值处照相底版的密度已达到饱和。解决问题的措施之一是牺牲一些记录密度,将照相底板放置于少许偏离焦点的地方。然而,最好的方法还是将随机移相器与位的图样(bit, pattern)重叠,使位的图样加上随机位相,不形成峰值,从而提高记录密度。

7.6.4 用调制菲涅耳环带板进行激光加工

激光会聚时,光束的能量密度很容易达到 $10 \sim 100$ 兆瓦/厘米<sup>2</sup>的程度,因而激光束能够应用于加工与焊接。激光加工往往用于机械上很难搞的微细加工上。

激光加工有全息图的方法与菲涅耳环带板的方法。前种方法是首先制成切割加工设计图的全息图,使用高亮度的再现光去照射再现象的加工部分而进行切割加工的。而后面这种方法是为了消除全息图本身的过热引起的限制而使用镀铬薄膜制成的调制菲涅耳环带板(Modulated Zone Plate或MZP)的方法,图7.18所示是用MZP加工的阵列孔的照片。

7.6.5 用干涉全息术测定变形

全息图再现象之间的干涉条纹可以用来测定物体的变形,变形量达到光波长这个数量级。这种方法有广泛的应用范围,例如,热膨胀,化学的侵蚀,植物的生长,气体,液体的流速,破损与疲劳的检测,产品管理等等。图7.19是其原理,在一张照相底板上用二次曝光记录瘤形成前后的全息图,由于全息图不仅复元形状同时还复元位相,所以当图中光路SPE与SP'E'之差为半波长时,这点的象就变暗,当光路差为一个波长时,这点变亮,形成干涉条纹,这种干涉条纹就是变形量的等高线。

用普通的干涉仪,二条光线必须存在于同一时间与同一场所。而全息干涉这种方法,第一次曝光与第二次曝光之间在时间上可以差开,形成时间分割式的干涉。由这个原因,就能

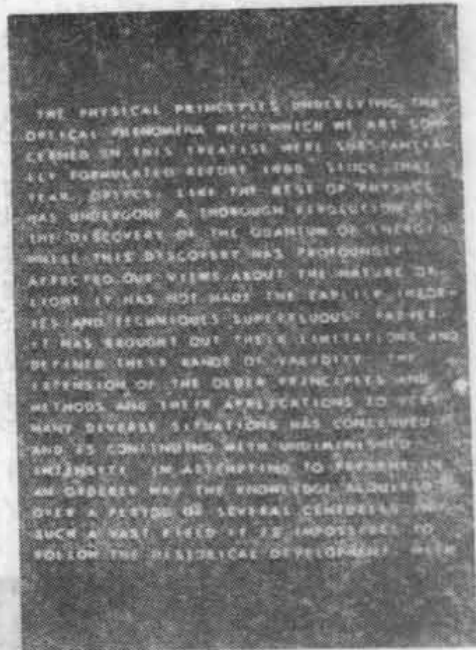


图7.15 从直径0.7毫米的全息图再现的象,记录密度是1毫  
米<sup>2</sup>的全息图上2000字

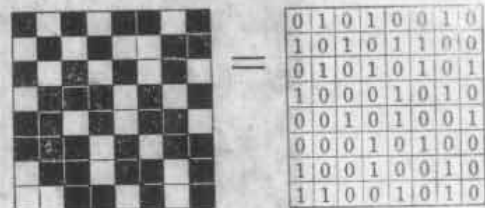


图7.16 “0”用黑色表示,“1”  
用白色表示的光学存储

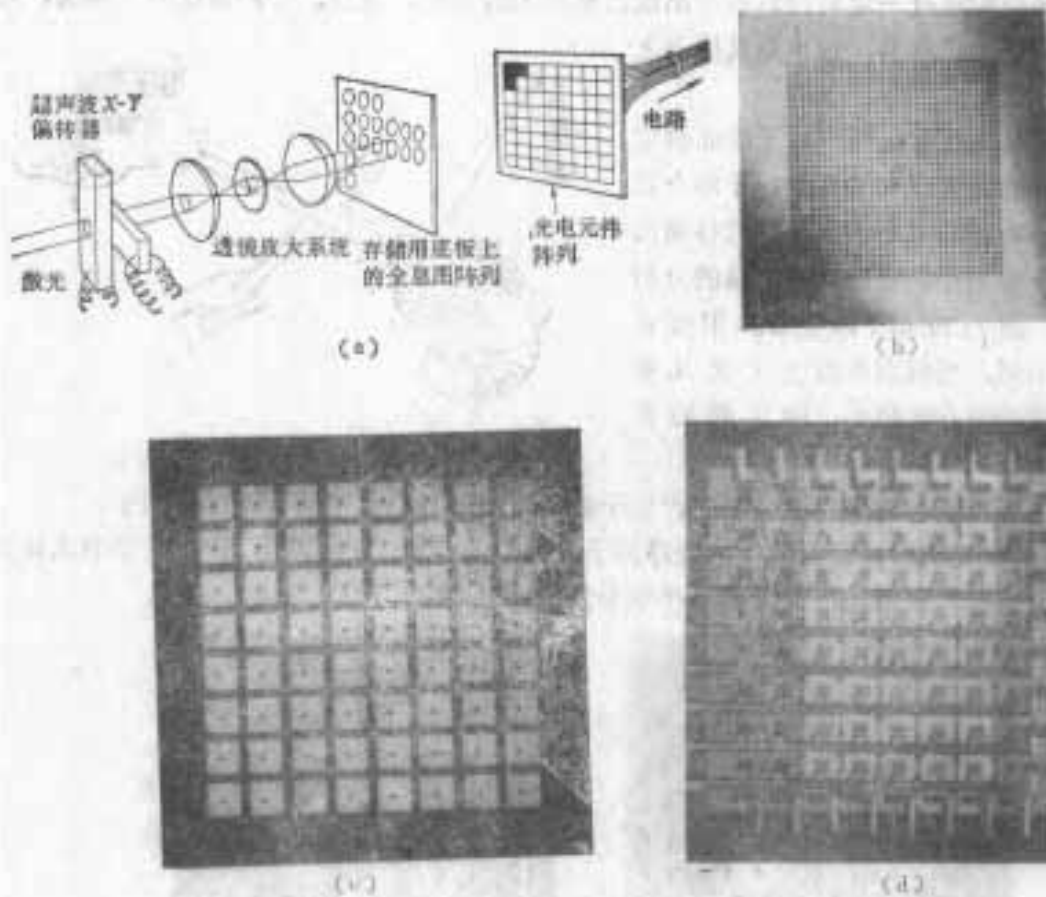


图 7.17 全息固定存储器在计算机上的应用

(a) 图中表示计算机用光学存储装置, 超声波偏转器使激光的照射点改变, 以照射所需的全息图, 再现的实象成于光电阵列上转换成电信号 (b) 存储用照相基板上的全息图阵列 (c) 存储用照相基板上的一个全息图的再现象 (d) 安置在相当于一个区间范围内的  $4 \times 8$  的光电三极管阵列的光电元件

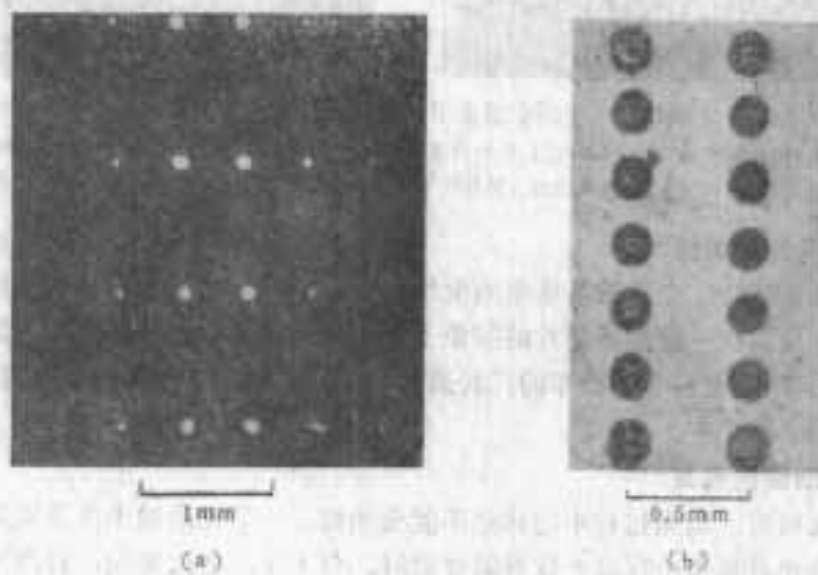


图 7.18 使用习题 5.4 中的 MZP 进行激光加工

(a) 在玻璃的绝缘薄膜上开的孔 (b) 在研磨过的铜表面上开的球形槽

够很容易的来检验经过一定时间以后所出现的现象上的变化，而且，干涉条纹是立体的，对物体位置的研究比较容易，这也是其优点之一。

当物体与其再现象之间产生干涉而测定物体的变形时就能实现实时观测。干涉全息术的缺点是当物体的变形不仅是平行移动而且还有旋转，弯曲与扭转等组成时定量的分析就变得复杂。图7.20是干涉全息术用于古典画修补的示例。当画面的温度变化几度时，涂着颜料的地方膨胀大，所以能检测到。

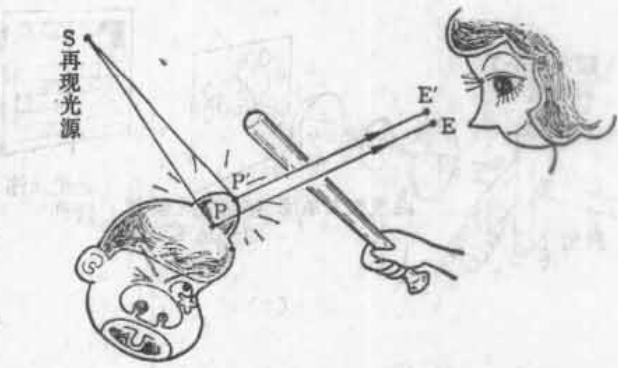


图7.19 干涉全息术

另外，还可以使再现象与产品之间产生干涉条纹而进行产品的质量管理的例子。

图7.21是检查凹面镜研磨质量的装置例子。用7.5节所述的方法，由设计图制成计算全息图，然后用其再现象与凹面镜表面产生干涉而进行检验。

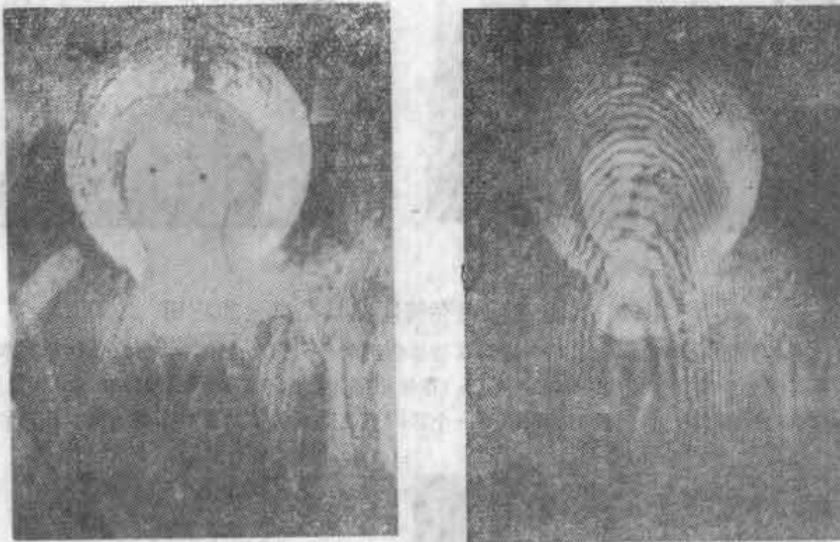


图7.20 干涉全息术用于古典画的修补时的检测

(a) 法朗契斯卡 (Francesca) 所作的圣母像(15世纪) (b) 室温时与画面有40°C的热风时这二种情况下干涉全息图的再现象

#### 7.6.6 照片差别的检测

如7.2节所述那样，全息图再现象的位相分布和原物上的位相分布是相反的，利用这点就能检测出其差别。在一张摄影照片的实象上重叠另外一张照片的全息图再现象，形成二张照片的差别。图7.22是放有吉普车的厂房照片，再引入没有吉普车的照片的全息图再现象就能检测出吉普车的存在。

#### 7.6.7 振动面的观测

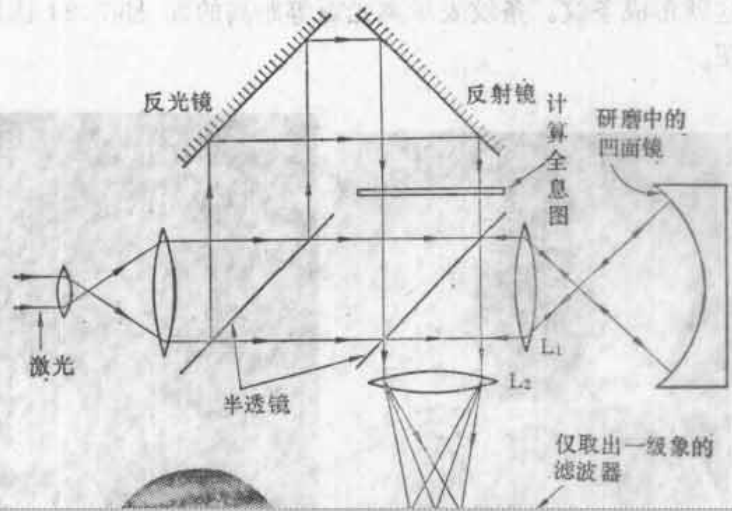
在制造全息图时，曝光过程中物体是不能变动的。一般记录的干涉条纹其间隔约1微米左右，因此，曝光过程中出现这个数量的变动时，由于干涉条纹变动，再现象就消失。如果将这种现象相反的加以应用，就能够测定微小振动的面分布。有振动的点其象就消失而变暗。不振动部分其象就形成而变亮，这样振动的图样就记录下来。图7.23是用这种方法观测吉



他表面振动的照片。这种方法的特殊情况，是作振动中物体的象，使激光闪频和振动的周期具有相同的周期，就能够得到振动在某一位相时振动面的静止象的全息图。这种闪频法用于测定工作状态下机械系统的变形等。

#### 7.6.8 等高线的制成

使用相干光的干涉条纹可以描绘出物体表面的等高线。第一种方法是用二个点光源产生空间驻波来照明，使用一个点光源和一个反射镜也属于此法。还有其他各种形式，如将一个点光源在两个位置移动，进行二次曝光，



象。错开的量越远则越大。当错开量为半波长的奇数倍时成为暗点，偶数倍的点成为亮点，这就形成条纹。条纹表示离光源等距离的面。图 7.24 就是用这种方法制成的等距离等高线图。



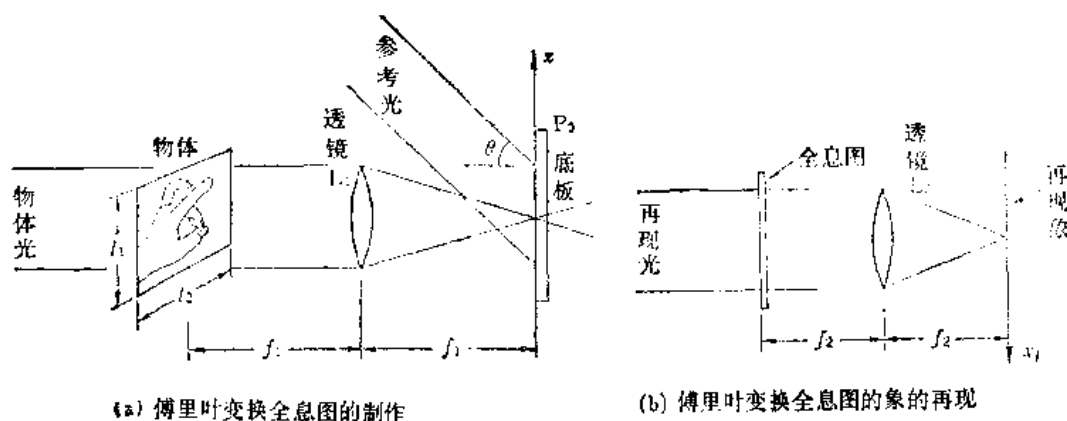


图7.26 傅里叶变换全息图

## 文 献

- (1) J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
- (2) W. T. Cathey, "Optical Information Processing and Holography," John Wiley & Sons, New York, 1974.
- (3) R. J. Collier, C. B. Burckhardt, and L. H. Lin, "Optical Holography" Academic Press, New York, 1971.
- (4) 辻内順平, 村田和美, "光学情報処理" 朝倉書店, 東京, 1974.
- (5) 滝 保夫, 青木昌治, 樋渡潤二, "画像工学", コロナ社, 東京, 1972.
- (6) H. J. Caulfield and S. Lu, "The Applications of Holography" Wiley-Interscience, New York, 1970.
- (7) T. S. Huang, "Digital Holography," Proc. IEEE, Vol. 59, pp. 1335~1346, 1971.
- (8) W. H. Lee, "Sampled Fourier Transform Hologram Generated by Computer," Appl. Optics, Vol. 9 pp. 639~643, 1970.
- (9) M. C. King, A. M. Noll and D. H. Berry, "A New Approach to Computer-Generated Holography," Appl. Optics, Vol. 9, pp. 471~475, 1970.
- (10) D. J. DeBittetto, "Holographic Panoramic Stereograms Synthesized from White Light Recordings" Appl. Optics, Vol. 8, pp. 1740~1741, 1969.
- (11) M. Akagi, T. Kaneko, and T. Ishiba, "Electron Micrographs of Hologram Cross Sections," Appl. phys. Letters Vol. 21, pp. 93~95, 1972.
- (12) C. Knox and R. E. Brooks, "Holographic motion picture microscopy," Proc. Roy. Soc. Lond, B, 174, pp. 115~121, 1969.
- (13) A. Ikeda and K. Kurahashi "Grating modulated phase plates for holographic storage" Appl. Opt. Vol. 14, pp. 2267~2273, 1975.
- (14) D. H. McMahon, "Holographic Ultrafiche," Appl. Opt., Vol. 11, pp. 798~806, 1972.
- (15) C. B. Burckhardt, "Use of a random phase mask for the recording of Fourier transform holograms of data masks," Appl. Opt., Vol. 9, pp. 695~700, 1970.
- (16) Y. Tsunoda and Y. Takeda, "High density image-storage holograms by a random phase sampling method," Appl. Opt., Vol. 13, pp. 2046~2051, 1974.

- (17) L. K. Anderson, "Holographic Optical Memory for Bulk Data Storage," *Bell Laboratories Records*, Nov, pp. 319~325, 1968.
- (18) A. Engel, J. Steffen, and G. Herziger, "Laser Machining with Modulated Zone Plates," *Appl. Opt.*, Vol. 13, pp. 269~273, 1974.
- (19) L. O. Heflinger, R. F. Wuerker, and R. E. Brooks, "Holographic interferometry" *J. Appl. Phys.*, Vol. 37, pp. 642~649, 1966.
- (20) 辻内順平, "ホログラフィの精密測定への応用" *機械の研究*, Vol. 22, pp. 85~93, 1970.
- (21) A. J. MacGovern and J. C. Wyant, "Computer Generated Holograms for Testing Optical Elements," *Appl. Opt.*, Vol. 10, pp. 619~624, 1971.
- (22) B. P. Hildebrand and K. A. Haines, "Multiple-Wavelength and Multiple-Source Holography Applied to Contour Generation," *J. of Opt. Society of Am.* Vol. 57, pp. 155~162, 1967.
- (23) L. O. Heflinger and R. F. Wuerker, "Holographic Contouring via Multifrequency Lasers," *Appl. Phys. Lett.*, 15, pp. 28~30, 1969.
- (24) C. Ågren and K. A. Stetson, "Measuring the Wood Resonance of Treble-Viol Plates by Hologram Interferometry," *J. Acoust. Soc. Amer.*, 46, p. 120, 1969.
- (25) P. Shajenko and C. D. Johnson, "Stroboscopic Holographic Interferometry," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 13, pp. 44~47, 1968.
- (26) K. Bromley, M. A. Monahan, J. F. Bryant, and B. J. Thompson, "Holographic Subtraction," *Appl. Opt.*, Vol. 10, pp. 174~181, 1971.
- (27) Y. Takeda, Y. Oshida, and Y. Miyamura, "Random Phase Shifters for Fourier Transformed Holograms," *Appl. Opt.*, Vol. 11, No. 4, pp. 818~822, 1972.
- (28) S. Amadesi, F. Gori, R. Grella, and G. Guattari, "Holographic Methods for Painting Diagnostics," *Appl. Opt.*, Vol. 13, pp. 2009~2013, 1974.

## 第八章 光学系统的空间频率特性

物理学与电子工程学的解析方法大致分成按时间处理与按频率处理二种方法。同样，光学工程学也大致可以分成空间域分析与傅里叶变换域分析，即空间频率分析这样二种处理方法。到上一章为止主要是讲述了空间域的分析方法，而本章则介绍空间频率域的处理方法。

### 8.1 相干光情况下的传递函数

光学系统的特性可以用空间频率特性来表示，空间频率特性是决定该系统能处理的最高空间频率或是计算输出象失真的有效量。

#### 8.1.1 点象响应函数

首先，考虑最基本情况，即对点光源系统的响应，如图 8.1(a) 所示。设在原点上的点光源  $\delta(x)\delta(y)$  作为输入时出射的输出象为  $h(x_i, y_i)$ ，则  $h(x_i, y_i)$  就称为该系统的点象响应函数 (impulse response function)，用它来表示该系统的特性。

其次，如图 8.1(b) 所示，当点光源的位置从原点移到点  $(x_0, y_0)$ ，则在屏幕上的象也移动，为简单起见，设光学系统的放大率为 1 倍，则屏幕上象的移动量在  $x$  方向为  $x_0$ ，在  $y$  方向为  $y_0$ ，移动后的象可用下式表示：

$$u(x_i, y_i) = h(x_i - x_0, y_i - y_0) \quad (8.1)$$

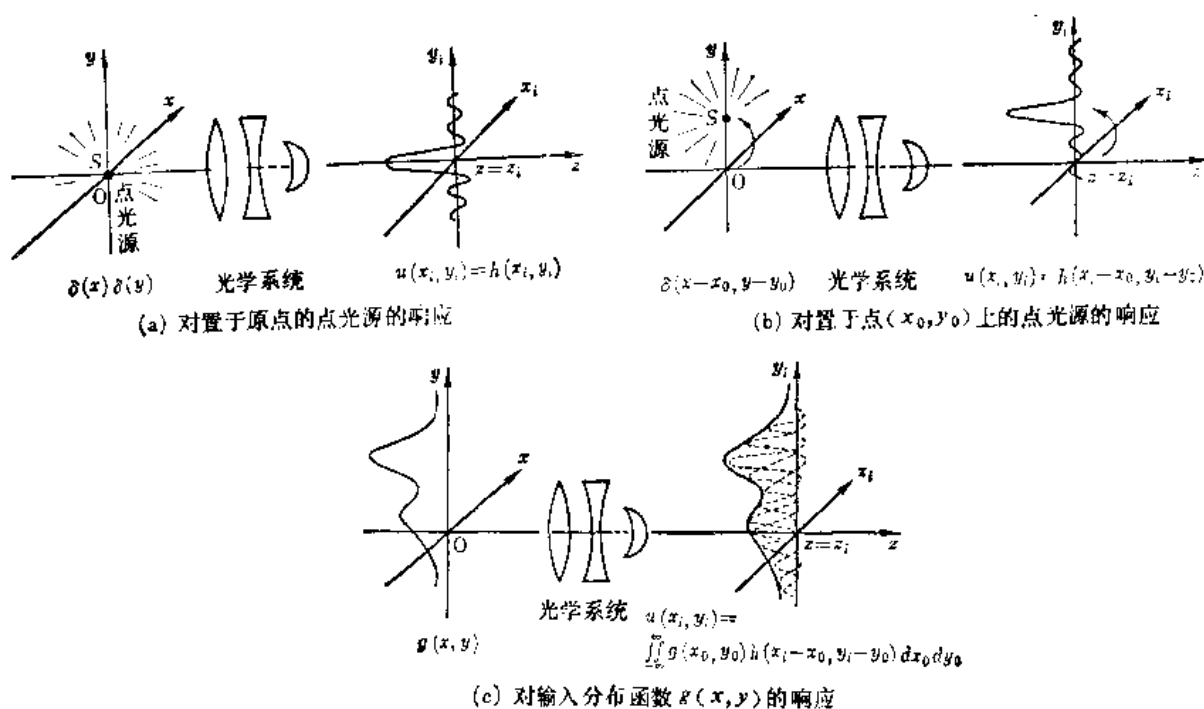


图 8.1 点象响应函数  $h(x, y)$  的说明

更进一步, 当用图 8.1(c) 所示的分布光源  $g(x_0, y_0)$  来代替点光源时, 求其输出象的表达式。

认为输入象是点光源的集合, 并只考虑位于其中的点  $(x_0, y_0)$  上的一个点光源, 则这个点光源的振幅是  $g(x_0, y_0)$ , 所以这点的输出象就成为:

$$g(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0) \quad (8.2)$$

因此, 由输入象整个面上的点光源而形成的输出象就成为:

$$u(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0 \quad (8.3)$$

式 (8.3) 是合成的运算公式, 因此可改写为:

$$u(x_i, y_i) = g(x_i, y_i) * h(x_i, y_i) \quad (8.4)$$

最后, 只要知道点象响应函数  $h(x_i, y_i)$ , 在任何输入的情况下, 都能够计算其输出分布, 这就意味着  $h(x_i, y_i)$  是一个很重要的函数。

应该注意到 2.5 节得出的点光源传递函数  $f_d(x, y)$  (point source transfer function) 与点象响应函数不要混淆起来。另外, 式 (8.4) 的成立条件是无论点光源在什么地方, 点光源的移动距离与象位置的移动距离必须一致, 这种性质称为推移不变 (shift invariant)。对实际的光学系统, 应该注意只有有限的区域内这种性质才成立。

### 8.1.2 相干传递函数

由于求取输出象的公式是合成形式, 因此在傅里叶变换面内就成为积的形式, 运算非常简单。

对式 (8.4) 二边进行傅里叶变换, 得到下面的式 (8.5):

$$U(f_x, f_y) = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \quad (8.5)$$

输出频谱与输入频谱之比为:

$$H(f_x, f_y) = \frac{U(f_x, f_y)}{G(f_x, f_y)} \quad (8.6)$$

此比值就称为相干传递函数 (Coherent Transfer Function 或 CTF)。这是与电路中的频率特性相当的量, 用于表示光学系统的空间频率特性。为了进一步了解用下面的例题来说明。

〔例题 8.1〕用图 8.2 所示的装置来拍摄相干光照明的物体的照片, 求这时照相机的相干传递函数与可能鉴别的最高空间频率。式中, 为计算简单起见, 物体, 透镜都认为是一维的, 透镜直径为  $D$ 。

〔答〕 可把 5.5.2 项所求得的结果原封不动的用作解答, 设一维的瞳函数是  $P$

$(x) = \Pi(x/D)$ , 则照相底板上的振幅分布  $u(x_i)$  用式 (5.44) 得:

$$u(x_i) = Kg \left( -\frac{x_i}{M} \right) * \text{sinc} \left( \frac{D}{\lambda d_2} x_i \right) \quad (8.7)$$

此式与式 (8.4) 比较, 点象响应函数  $h(x_i)$  立即可以知道是:

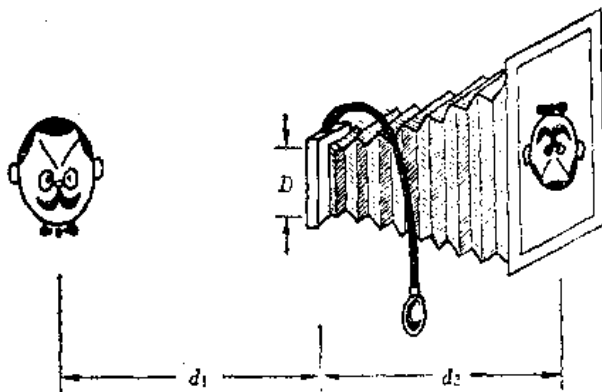


图 8.2 照相机 CTF 的计算

$$h(x_i) = K \operatorname{sinc} \left( \frac{D}{\lambda d_2} x_i \right) \quad (8.8)$$

因此, 相干传递函数  $H(f_x)$  是  $h(x_i)$  的傅里叶变换:

$$H(f_x) = K \frac{\lambda d_2}{D} \Pi \left( \frac{\lambda d_2 f_x}{D} \right) \quad (8.9)$$

此式之值是:

$$H(f_x) = \begin{cases} K \frac{\lambda d_2}{D} & |f_x| < \frac{D}{2\lambda d_2} \\ 0 & |f_x| > \frac{D}{2\lambda d_2} \end{cases} \quad (8.10)$$

输出象的截止频率  $f_{i \max}$  是:

$$f_{i \max} = \frac{D}{2\lambda d_2} \quad (8.11)$$

另外, 输入象的大小是输出象的  $d_1/d_2$  倍, 因而输入象的截止空间频率  $f_{o \max}$  应为:

$$f_{o \max} = f_{i \max} \frac{d_2}{d_1} = \frac{D}{2\lambda d_1}$$

对于一般情况, 即把瞳函数为  $P(x, y)$  的透镜用于成像的情况, 其相干传递函数可用下法求取, 即对透镜成像公式 (5.45) 的二边进行傅里叶变换而得到:

$$\bar{E}(f_x, f_y) = KG(-Mf_x, -Mf_y) \cdot P(\lambda d_2 f_x, \lambda d_2 f_y) \quad (8.12)$$

式 (8.12) 与式 (8.5) 比较, 则有:

$$H(f_x, f_y) = P(\lambda d_2 f_x, \lambda d_2 f_y) \quad (8.13)$$

所以, 透镜的相干传递函数只要用  $\lambda d_2 f_x$ ,  $\lambda d_2 f_y$  置换瞳函数的变数就可以得到。即透镜的相干传递函数形式与瞳函数相似, 这就使相干传递函数的计算十分简单。

## 8.2 相干光与非相干光情况下传递函数的不同点

先从光强分布  $I(x, y)$  说起。

光的强度是光学上的最基本量之一, 不论相干光还是非相干光, 所形成的光强分布的时间平均值可由下式求出:

$$I(x_i, y_i) = \langle u(x_i, y_i, t) u^*(x_i, y_i, t) \rangle \quad (8.14)$$

式中,  $u(x_i, y_i, t)$  是象面上的光振幅分布,  $u^*(x_i, y_i, t)$  是其共轭函数。此外,  $\langle \rangle$  表示时间平均值。设光源分布函数是随时间而变化的, 以  $g(x_0, y_0, t)$  表示, 则根据式 (8.3) 与式 (8.14) 成为:

$$I(x_i, y_i) = \left\langle \iint_A g(x_0, y_0, t) h(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0 \right. \\ \left. \times \iint_A g^*(x'_0, y'_0, t) h^*(x_i - x'_0, y_i - y'_0) dx'_0 dy'_0 \right\rangle$$

如果注意到上式的面积分中微小面积  $dx_0 dy_0$  与  $dx'_0 dy'_0$  之值的取法是相互独立的, 那么可以写成:

$$I(x_i, y_i) = \left\langle \iint_A \iint_A h(x_i - x_0, y_i - y_0) h^*(x_i - x'_0, y_i - y'_0) \right. \\ \left. g(x_0, y_0, t) g^*(x'_0, y'_0, t) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 \right\rangle \quad (8.15)$$

设传播介质的状态不随时间而变化, 则有:

$$I(x_i, y_i) = \iint_A \iint_A h(x_i - x_0, y_i - y_0) h^*(x_i - x'_0, y_i - y'_0) \\ \langle g(x_0, y_0, t) g^*(x'_0, y'_0, t) \rangle dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 \quad (8.16)$$

若着眼于式(8.16)中的  $g(x_0, y_0, t) g^*(x'_0, y'_0, t)$ , 此值是积分范围内的任意点  $(x_0, y_0)$  的振幅与其他任意点  $(x'_0, y'_0)$  的振幅的共轭数之积。当保持空间相干性时, 则:

$$\langle g(x_0, y_0, t) g^*(x'_0, y'_0, t) \rangle = g(x_0, y_0) g^*(x'_0, y'_0) \quad (8.17)$$

为了帮助理解式(8.17), 现在假设一种特殊情况, 即振幅不随时间而变化, 可写成:

$$g(x_0, y_0, t) = |g(x_0, y_0)| e^{i\phi(x_0, y_0, t)} \\ g(x'_0, y'_0, t) = |g(x'_0, y'_0)| e^{i\phi(x'_0, y'_0, t)}$$

这种情况下, 式(8.17)则成为:

$$\langle g(x_0, y_0, t) g^*(x'_0, y'_0, t) \rangle = |g(x_0, y_0)| |g(x'_0, y'_0)| \\ \times \langle e^{i[\phi(x_0, y_0, t) - \phi(x'_0, y'_0, t)]} \rangle \quad (8.18)$$

所谓空间相干(spatially coherent), 是表示任意二点的光波其相位差在时间上是一定的。此外, 当点的位相在时间上变化(称为时间非相干, temporally incoherent), 而其他点的光波位相由于同步只发生相同大小的变化, 这就保持空间上的相干性。

如果把式(8.17)代入式(8.16)就可求出空间相干时的  $I(x_i, y_i)$  之值:

$$I(x_i, y_i) = \iint_A \iint_A g(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0) \\ \times g^*(x'_0, y'_0) h^*(x_i - x'_0, y_i - y'_0) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 \\ = \iint_A g(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0 \\ \times \left[ \iint_A g(x'_0, y'_0) h(x_i - x'_0, y_i - y'_0) dx'_0 dy'_0 \right]^* \\ \therefore I(x_i, y_i) = \left| \iint_A g(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0 \right|^2 \quad (8.19)$$

此外, 如果采用合成运算的符号, 则

$$I(x_i, y_i) = |g(x_i, y_i) * h(x_i, y_i)|^2 \quad (8.20)$$

下面, 讨论空间非相干时的情况, 与上面相反, 任意一点的位相与其他点的位相变化完全无关。所以, 除非二点在同一情况, 即式(8.17), (8.18)的位相项是零, 在这种情况下, 式(8.17)才成为:

$$\langle g(x_0, y_0, t) g^*(x'_0, y'_0, t) \rangle = |g(x_0, y_0)|^2 \delta(x_0 - x'_0) \delta(y_0 - y'_0) \quad (8.21)$$

把式(8.21)代入式(8.16), 那么在空间非相干情况下的  $I(x_i, y_i)$  之值为:



$$I(x_i, y_i) = \iint_A \iint_A h(x_i - x_0, y_i - y_0) h^*(x_i - x'_0, y_i - y'_0) \\ \times |g(x_0, y_0)|^2 \delta(x_0 - x'_0) \delta(y_0 - y'_0) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0$$

首先对  $x'_0, y'_0$  积分:

$$I(x_i, y_i) = \iint_A h(x_i - x_0, y_i - y_0) h^*(x_i - x_0, y_i - y_0) |g(x_0, y_0)|^2 dx_0 dy_0 \\ = \iint_A |h(x_i - x_0, y_i - y_0)|^2 |g(x_0, y_0)|^2 dx_0 dy_0 \quad (8.22)$$

其次, 采用合成运算的符号, 则有

$$I(x_i, y_i) = I_0(x_i, y_i) * |h(x_i, y_i)|^2 \quad (8.23)$$

式中

$$I_0(x_0, y_0) = |g(x_0, y_0)|^2$$

空间上相干的式 (8.20) 与空间上不相干的式 (8.23) 相比较可以看出, 在相干情况下是振幅分布函数与点象响应函数合成的绝对值的平方。而非相干情况下, 是光强度分布函数与点象响应函数各自绝对值的平方的合成。

### 8.3 非相干光的传递函数

对光源是空间相干的情况, 其传递函数已在 8.1 节中叙述, 下面是研究非相干情况下的传递函数。

将式 (8.23) 的二边进行傅里叶变换, 则

$$\mathcal{F}\{I(x_i, y_i)\} = \mathcal{F}\{|g(x_i, y_i)|^2\} \cdot \mathcal{F}\{|h(x_i, y_i)|^2\} \quad (8.24)$$

式 (8.24) 与相干情况下的式 (8.5) 相对应。其次, 对  $f_x = f_y = 0$  的频率频谱, 即谱线的宽度标准化, 则

$$\mathcal{G}(f_x, f_y) = \mathcal{G}_0(f_x, f_y) \cdot \mathcal{L}(f_x, f_y) \quad (8.25)$$

式中

$$\mathcal{G}(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{I(x_i, y_i)\}}{\mathcal{F}\{g(x_i, y_i)\}_{f_x=f_y=0}} \quad (8.26)$$

$$\mathcal{G}_0(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{|g(x_i, y_i)|^2\}}{\mathcal{F}\{|g(x_i, y_i)|^2\}_{f_x=f_y=0}} \quad (8.27)$$

$$\mathcal{L}(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{|h(x_i, y_i)|^2\}}{\mathcal{F}\{|h(x_i, y_i)|^2\}_{f_x=f_y=0}} \quad (8.28)$$

式 (8.28) 的  $\mathcal{L}(f_x, f_y)$  称为光学传递函数 (Optical Transfer Function 或者 OTF), 用以表示非相干光源时的光学系统的成像质量。

若将式 (8.28) 改写一下, 表示 OTF 是 CTF 的自相关函数, 首先考虑式 (8.28) 的分子:

$$\mathcal{F}\{|h(x_i, y_i)|^2\} = \mathcal{F}\{h(x_i, y_i)h^*(x_i, y_i)\} \\ = H(f_x, f_y) * H^*(-f_x, -f_y) \quad (8.29)$$

这里,  $\star$  表示相关函数的运算, 其定义是:

$$X(f_x, f_y) \star Y(f_x, f_y) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} X(x, y) Y^*(x - f_x, y - f_y) dx dy \quad (8.30)$$

当  $X$  与  $Y$  相等时, 特称为自相关函数, 若利用式 (8.30) 则式 (8.28) 的分子有如下结果,

$$\mathcal{F}\{|h(x_i, y_i)|^2\} = H(f_x, f_y) \star H(f_x, f_y) \quad (8.31)$$

关于式 (8.28) 的分母, 应是:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{|h(x_i, y_i)|^2\}_{f_x=f_y=0} &= \iint_{-\infty}^{\infty} H(x, y) H^*(x - f_x, y - f_y) dx dy |_{f_x=f_y=0} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} |H(x, y)|^2 dx dy \end{aligned} \quad (8.32)$$

最后, 从式 (8.28), (8.31), (8.32) 得到:

$$\mathcal{G}(f_x, f_y) = \frac{H(f_x, f_y) \star H(f_x, f_y)}{\iint_{-\infty}^{\infty} |H(x, y)|^2 dx dy} \quad (8.33)$$

下面, 举一个用式 (8.33) 来求取光学传递函数的例子。

〔例题 8.2〕 例题 8.1 是使用相干光源, 现在求使用非相干光源情况下的照相机的光学传递函数, 此外, 求取这种情况下照相机能分辨的最高空间频率, 并与使用相干光源的情况加以比较。

〔答〕 把式 (8.9) 之值代入式 (8.33), 则有:

$$\mathcal{G}(f_x) = \frac{\left(K \frac{\lambda d_2}{D}\right)^2 \Pi\left(\frac{\lambda d_2 f_x}{D}\right) \star \Pi\left(\frac{\lambda d_2 f_x}{D}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(K \frac{\lambda d_2}{D}\right)^2 \left\{ \Pi\left(\frac{\lambda d_2 x}{D}\right) \right\}^2 dx}$$

因此,  $\mathcal{G}(f_x) = \Lambda\left(\frac{\lambda d_2}{D} f_x\right)$

此结论与例题 8.1 的结论相比较时, 示于图 8.3。

在使用非相干光的情况下, 可以得到截止频率扩大到二倍这一结论。初看起来, 采用非相干光源时, 分辨率可以提高, 但这也未必一定如此, 因为, 非相干光情况下, 象的表达式由下式得到:

$$\mathcal{I}(f_x, f_y) = \mathcal{I}_0(f_x, f_y) \cdot \mathcal{G}(f_x, f_y)$$

$\mathcal{I}_0(f_x, f_y)$  的频谱与振幅的频谱  $G(f_x, f_y)$  相比较, 除去例外, 一般扩大到二倍。所以,  $\mathcal{G}(f_x, f_y)$  的频带宽除非是  $H(f_x, f_y)$  的二倍以上, 输出象的质量要希望达到相干光情况下相同程度是不可能的。

下面叙述用作图来求取透镜系统的光学传递函数的方法。如上所述, 瞳函数以  $P(x, y)$  表示的透镜系统的相干传递函数  $H(f_x, f_y)$ , 从式 (8.13) 有:

$$H(f_x, f_y) = P(\lambda d_2 f_x, \lambda d_2 f_y)$$

由式 (8.30), (8.33), 光学传递函数可表示为:

$$\mathcal{G}(f_x, f_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_2 x, \lambda d_2 y) P(\lambda d_2(x - f_x), \lambda d_2(y - f_y)) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \{P(\lambda d_2 x, \lambda d_2 y)\}^2 dx dy} \quad (8.34)$$

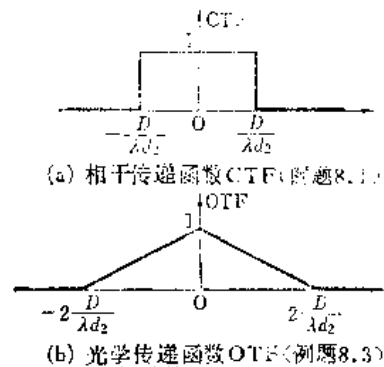


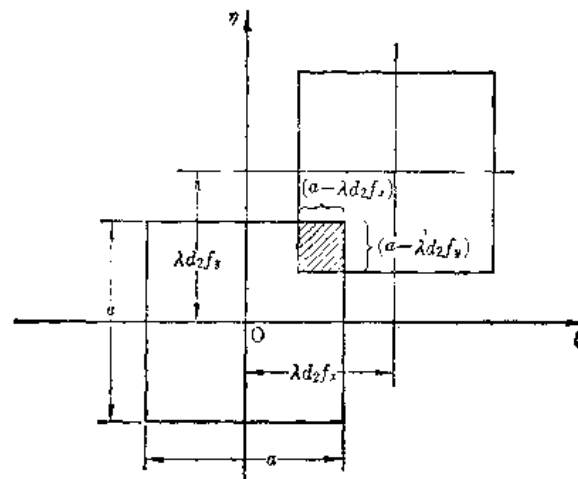
图 8.3 相干与非相干光源的传递函数的比较

式中  $P(\lambda d_2 f_x, \lambda d_2 f_y)$  是实数, 如果作如下的变数变换,

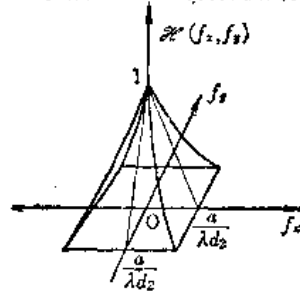
$$\lambda d_2 x = \xi, \quad \lambda d_2 y = \eta$$

则有:

$$\mathcal{H}(f_x, f_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta) \cdot P(\xi - \lambda d_2 f_x, \eta - \lambda d_2 f_y) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} \{P(\xi, \eta)\}^2 d\xi d\eta} \quad (8.35)$$



(a) 表示  $\mathcal{H}(f_x, f_y)$  的分子计算方法的图



(b) 正方形光瞳的OTF

图8.4 正方形透镜的OTF图解求法

式 (8.35) 的运算可以用图形来表示, 因瞳函数区域内其值是 1, 分母表示瞳函数的面积, 而式 (8.35) 的分子是瞳函数与中心偏在  $(\lambda d_2 f_x, \lambda d_2 f_y)$  点上描出的瞳函数的重合部分的面积, 即

$$\text{OTF} = \frac{\text{与偏瞳函数重合部分的面积}}{\text{瞳函数的面积}} \quad (8.36)$$

图 8.4 是光瞳为正方形时的例子。

〔例题8.3〕用CTF的截止频率为  $1.2f_0$  的光学系统把下面的一维分布函数  $g(x)$  表示的掩模成象, 而

$$g(x) = |\cos 2\pi f_0 x|$$

分析比较使用相干光源好还是使用非相干光源好。

〔答〕  $g(x)$  与  $I_0(x) = |g(x)|^2$  可改写为:

$$|\cos 2\pi f_0 x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{1 - (2n)^2} e^{j2\pi n \cdot 2f_0 x}$$

$$|\cos 2\pi f_0 x|^2 = \cos^2 2\pi f_0 x = \frac{1}{4} (2 + e^{-j4\pi f_0 x} + e^{j4\pi f_0 x})$$

上式的傅里叶展开如图 8.5 所示, 从图中明显看出, 使用相干光源时其象只有  $f = 0$  的频谱, 这是无花纹的象。而使用非相干光源时, 象的对比度比原来的掩模的对比度差, 但可再现  $f = \pm 2f_0$  的频率成分。这个例题,  $u(x) = g(x)$  的基本频率和  $I_0(x) = |g(x)|^2$  的基本频率是相等的, 当然, 这是例外的情况。

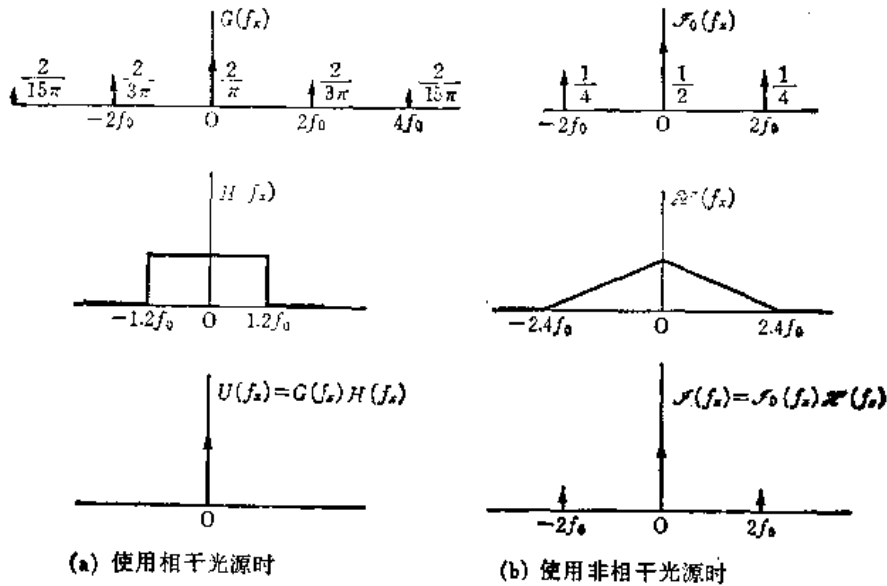


图 8.5 使用相干光源与使用非相干光源时分布函数  $g(x) = |\cos 2\pi f_0 x|$  所成的象的比较

## 8.4 调制传递函数 (MTF)

象质评价由于要引进心理上的因素, 多数情况难于用定量来表示。目前, 用定量表示的一个方法是对比度。对比度  $m$  的定义是:

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (8.37)$$

式中  $I_{\max}$  是最大光强,  $I_{\min}$  是最小光强。

$m$  这个定义使用非常方便, 即光强分布的表示式为:

$$I_0(x) = 1 + A \cos 2\pi f_0 x \quad (8.38)$$

当  $A$  是正的实数时,  $I$  的最大与最小值是:

$$I_{\max} = 1 + A$$

$$I_{\min} = 1 - A$$

将此式代入式 (8.37), 则

$$m = A \quad (8.39)$$

也就是说,把背景的程度作为其单位,  $m$  就正好成为调制振幅。

一般通过光学系统的输出象的对比度总比输入象要差,这个对比度的变化量与空间频率特性有密切的关系。把输入象与输出象的对比度之比称为调制传递函数(Modulation Transfer Function 或 MTF),也就是 MTF 的定义是:

$$\text{MTF} = \frac{\text{输出象的对比度}}{\text{输入象的对比度}} \quad (8.40)$$

调制传递函数可用于表示光学系统的特征。

## 8.5 调制传递函数 (MTF) 与光学传递函数 (OTF) 的关系

当用式 (8.38) 表示输入象时,其输出象山式 (8.23) 得到

$$\begin{aligned} I(x_i) &= (1 + m \cos 2\pi f_0 x_i) * |h(x_i)|^2 \quad (8.41) \\ I(x_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx + \frac{m}{2} e^{i2\pi f_0 x_i} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 e^{-i2\pi f_0 x} dx \\ &\quad + \frac{m}{2} e^{-i2\pi f_0 x_i} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 e^{i2\pi f_0 x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx + \frac{m}{2} [e^{i2\pi f_0 x_i} H \star H + \{e^{i2\pi f_0 x_i} H \star H\}^*] \quad (8.42) \end{aligned}$$

由于  $H \star H$  之值一般是复数,所以可以写成

$$H \star H = |H \star H| e^{i\phi} \quad (8.43)$$

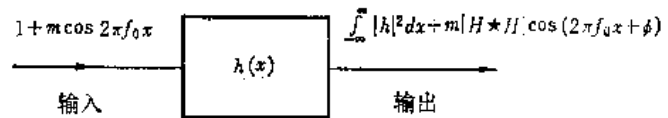


图8.6 调制传递函数的计算

把式 (8.43) 代入式 (8.42), 就

可以得到式 (8.44) 的输出象的表示式为式 (8.45) 与式 (8.46), 即

$$I(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx + m |H \star H| \cos(2\pi f_0 x_i + \phi) \quad (8.44)$$

$$I_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx + m |H \star H| \quad (8.45)$$

$$I_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx - m |H \star H| \quad (8.46)$$

把式 (8.45), (8.46), 代入式 (8.37), 就可以求出下式和输出象的对比度:

$$m_{\text{输出}} = \frac{m |H \star H|}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx} \quad (8.47)$$

从式 (8.40) 及 (8.47) 得到调制传递函数为

$$\text{MTF} = \frac{m_{\text{输出}}}{m} = \frac{|H \star H|}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx} \quad (8.48)$$

将匹兹伐定理(Parseval's theorem)  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f_x)|^2 df_x$  应用到式 (8.33),

并与式 (8.45) 的右边进行比较而得到

$$\text{MTF} = |\text{OTF}| \tag{8.49}$$

从而得到调制传递函数等于光学传递函数绝对值的结论。

另外，可以看出，输出象的最大值的位置偏离式 (8.38) 位置的距离相当于  $\phi$ ，此位相的偏转称为位相传递函数 (Phase Transfer Function 或 PTF)。所以，从式 (8.44) 得出的结论，当输入象是式 (8.38) 那样的正弦波，不论点象响应函数如何，输出象仍然是正弦波，而且其空间频率与输入象的空间频率相等。

### 习 题

习题 8.1 当函数  $A(f_x, f_y)$  是实函数，试证明其自相关函数  $A \star A$  之值是对原点成点对称的。

习题 8.2 当点象分布函数  $h(x, y)$  成点对称时，证明光学传递函数 (OTF) 之值成为实数，即等于调制传递函数。

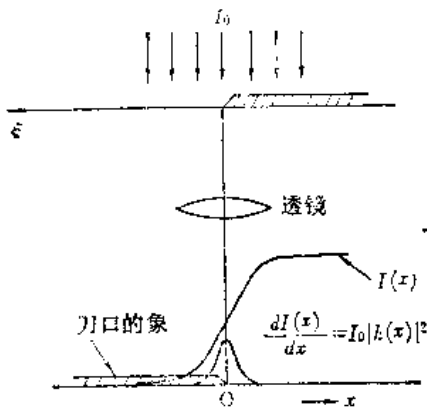


图8.7 刀口成象求  $|h(x)|^2$  值的方法

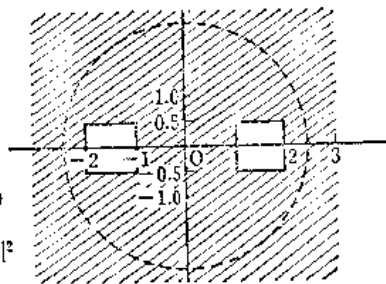


图8.8 二个正方形成的光瞳

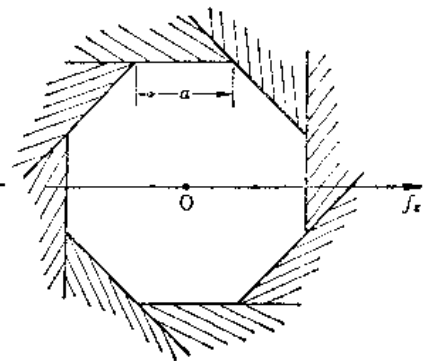


图8.9 一边为  $a$  的正八角形快门

习题 8.3 如图 8.7 所示，把刀口置于  $\xi = 0$  处，用透镜把其象成于光屏上，试证明对  $x$  的光强分布的微分系数与透镜的点象响应函数  $|h(x)|^2$  之间的关系是：

$$|h(x)|^2 = \frac{1}{I_0} \frac{dI(x)}{dx} \tag{8.50}$$

习题 8.4 求二个正方形的开孔如图 8.8 那样排列而制成的透镜光瞳面的光学传递函数。其中，正方形的一边长是 1 厘米，二正方形的中心距是 3 厘米，光的波长是 0.5 微米 ( $5 \times 10^{-8}$  厘米)，透镜与成象面的距离是 10 厘米。

习题 8.5 有一个如图 8.9 所示的一边为  $a$  的正八角形快门的镜头，当用此镜头在离镜头  $d_s$  的光屏上成象时，求此光学系统的光学传递函数 (OTF) 的  $f_x$  轴成分并描画其图形，其中光的波长是  $\lambda$ 。

习题 8.6 参考图 8.10，计算具有半径为  $a$  的圆形光瞳的透镜的光学传递函数 (OTF)。

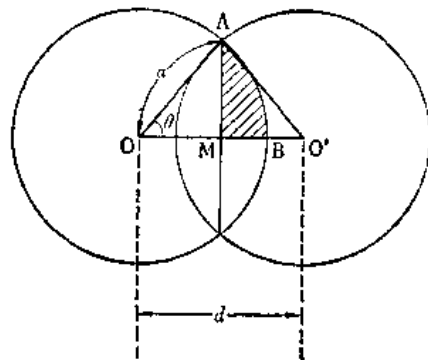


图8.10 二圆相重部分的面积

(a) 证明如图 8.10 的二圆相重部分内斜线所示部分的面积可用下式表示:

$$S(d) = \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left( \frac{d}{2a} \right) - \frac{ad}{4} \sqrt{1 - \left( \frac{d}{2a} \right)^2} \quad (8.51)$$

(b) 利用式 (8.51) 求圆形光瞳的光学传递函数, 并作出其图形, 其中离光屏的距离是  $d$ , 光的波长是  $\lambda$ 。

## 文 献

- (1) 鈴木達朗, “画像の光学的処理”, 電子通信学会誌, Vol. 57 (pp. 1278~1284), 1974.
- (2) 滝, 青木, 樋渡, “画像工学”, コロナ社, 1972.
- (3) 辻内, 村田, “光学情報処理”, 朝倉書店, 1974.
- (4) W. T. Cathey, “Optical Information Processing and Holography,” John Wiley & Sons, New York, 1974.
- (5) J. W. Goodman, “Introduction to Fourier Optics,” McGraw Hill Book Co, New York, 1968.
- (6) L. Levi, “Applied Optics,” John Wiley and Sons, New York, 1968.
- (7) J. R. Meyer-Arendt, “Introduction to classical and modern optics,” Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J., 1972.

## 第九章 光学信息处理

利用光学现象的各种性质，能够进行信息处理。其应用可以将摄影曝光时抖动引起的模糊、污点、重叠摄影、曝光不正确、污染、象质差等因素造成的不良照片加以修正，直到文字的读取等等，其应用范围是很广泛的。

### 9.1 摄影底板的感光特性

进行光学信息处理时，底板的感光特性往往是个重要的问题。因此，在这里简单提一下。

若将卤化银为基本感光材料的底板曝光后再显影，这时感光材料的银粒子被游离出来，使底板的透光度  $\tau$  发生变化。游离银粒子的量和透光度之间存在着对数关系，与  $\log 1/\tau$  成正比。为了对底板透光度下定义，采用与游离银粒子量有关的量。

$$D = \log_{10} (1/\tau) \quad (9.1)$$

$D$  称为密度。

F. Hurter 和 V. C. Driffield 将曝光量的对数取作横坐标，将密度取作纵坐标，作成曲线以表示底板的特性，这特性曲线称为 H-D 曲线，典型的 H-D 曲线表示在图 9.1 上。

下面，对此特性曲线加以说明。底板即使在完全不曝光时，也不是完全透明的。因此，曲线不通过原点，在原点附近平行于横轴，这部分曲线称为灰雾区 (fog) 部分，弯曲点称为趾部 (toe)。

若比这点的曝光量再有增加，就进入直线变化的区域，其斜率一般用符号  $\gamma$  表示。曲线的最高点称为肩部 (shoulder)，曝光量再增加，则密度反而下降，把这段称为负感部分 (solarization)。

下面，求一下在 H-D 曲线的直线范围内，曝光量和感光度之间的关系式(参考图 9.1)，

$$\log_{10} (1/\tau) = D = \gamma \log_{10} (E) - \log_{10} (E_0) \quad (9.2)$$

得到下面的关系式

$$\tau = E_0 E^{-\gamma} \quad (9.3)$$

把振幅透过率定义为  $t = \sqrt{\tau}$ ，将它代替光强透过率并代入式 (9.3)，可得如下关系式

$$t = \sqrt{E_0} E^{-(\gamma/2)} \quad (9.4)$$

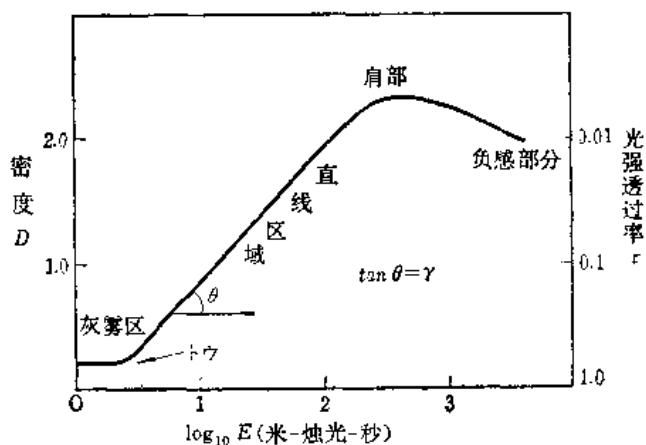


图9.1 底片的H-D曲线

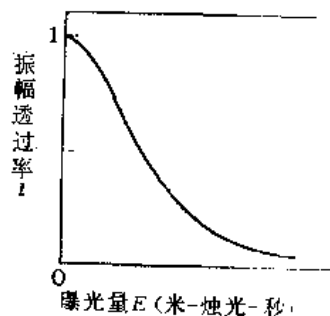


图9.2 底片的t-E曲线



此式表示底板特性的另一个曲线即  $t$  和  $E$  的关系曲线，这曲线称为底板的  $t$ - $E$  曲线。

## 9.2 基本运算的光学方法

下列各节叙述的各种光学信息处理，都是通过基本运算的组合而实现的；故在本节中，把基本运算归纳一下以作好准备。

### 9.2.1 和（差）的算法

如图 9.3 所示，将半透明的玻璃板，即分光镜，与两平行光束成  $45^\circ$  角度地放置，使两光束投射到同一屏幕上。把透镜  $L$  放在能使输入象  $g_1, g_2$ （以下，除必要时以外，把  $g_1(x, y)$  和  $g_2(x, y)$  写成  $g_1$  和  $g_2$ ，成象到屏幕面上的位置，就可以求得  $g_1 + g_2$ 。必须注意，若拿掉透镜，则得到的是  $g_1$  和  $g_2$  衍射象的和，而不是  $g_1$  和  $g_2$  象的和。

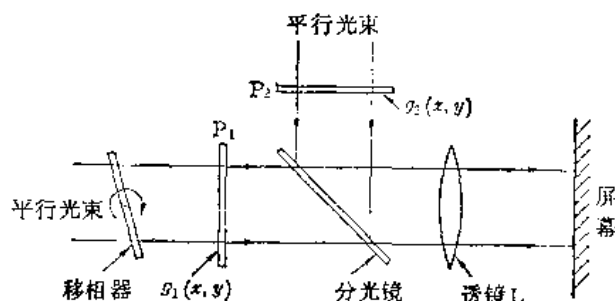


图9.3 光学上形成的二个象之和(差)

照射  $g_1, g_2$  的两光束其光程差若为半波长的偶数倍则成为相加。若为奇数倍，则成为相减。如果将图 9.3 左端的玻璃板旋转，则通过玻璃板中的距离就发生变化，就能够改变位相。

下面，讲述一下非实时记录全息图的方法。最初，用参考光  $R$  和  $g_1$  产生全息图，然后把  $R$  和  $g_2$  产生的全息图曝光在同一张全息图上。这时，全息图的透过率分布为

$$\begin{aligned} & |R + g_1|^2 + |R + g_2|^2 \\ & = 2|R|^2 + |g_1|^2 + |g_2|^2 + R^*[g_1 + g_2] + R[g_1^* + g_2^*] \end{aligned} \quad (9.5)$$

(9.5) 式右边第四项表示  $g_1$  和  $g_2$  之和。

### 9.2.2 乘算的方法

输入  $g_1$  和  $g_2$  求积的运算，仅仅只要把两块板重合，很简单，而且能实时进行。但是，想移动其中一块板时，可能会擦伤板，所以，使用图 9.4 那样的透镜系统。

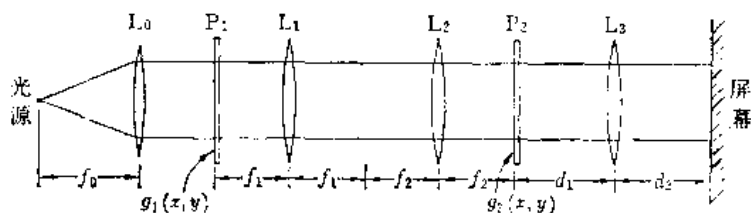


图9.4 二个象的乘算的方法

透镜  $L_1$  和  $L_2$ ，在  $P_2$  面上产生放大为  $f_2/f_1$  倍的  $g_1$  的倒立实象。若将  $g_2$  放在  $P_2$  面上，求两者的积。透镜  $L_3$  将此积的实象形成在屏幕上。

下面，叙述一下应用摄影底板的感光特性的方法。如图 9.5 所示，把  $g_1(x, y)$  和  $g_2(x, y)$  从两个不同方向入射时，底板的透过率分布为

$$\begin{aligned} & \left| g_1\left(\frac{x}{\cos\alpha}, y\right) e^{-ikx\sin\alpha} + g_2(x, y) \right|^2 \\ & = \left| g_1\left(\frac{x}{\cos\alpha}, y\right) \right|^2 + |g_2(x, y)|^2 + g_1\left(\frac{x}{\cos\alpha}, y\right) e^{-ikx\sin\alpha} g_2^*(x, y) \\ & \quad + g_2^*\left(\frac{x}{\cos\alpha}, y\right) e^{ikx\sin\alpha} g_1(x, y) \end{aligned} \quad (9.6)$$

若把再现光垂直入射到此底板上，则在底板上可以再现朝向透过角  $\alpha$  的  $g_1(x/\cos\alpha, y)g_2^*(x, y)$  的分布。这里必须注意， $g_2$  成为共轭数。此外，如果使用棱镜，则  $e^{ikx\sin\alpha}$  可以等于 1。

9.2.3 除算的方法

分布函数的商  $g_1/g_2$  的运算，是先求  $1/g_2$  之值。再用上述的方法求出  $g_1$  和以上的计算结果的积。然而，求透过率分布的倒数是存在问题的，所以把倒数分成如下二个阶段来运算

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{|g_2|^2} \cdot g_2^* \quad (9.7)$$

式 (9.7) 右边的第一因子，从式 (9.4) 可以看出，只要将  $g_2$  拍摄在  $\gamma = 2$  的底板上就可以了，而第二因子是在式 (9.6) 的第三项中，使  $g_1 = 1$ 。

9.2.4 平均的方法

这似乎只要反复进行 9.2.1 节的和算就可以实现。但是，输入数受限制，这里讲述的方法，其优点是，能够实时地把可变的衰减膜放入不想过分加强的输入区，一边实际地观测平均值，一边控制输出象。

图 9.6 是说明这原理的图。如图 9.6 (a) 所示，将物体“ $A$ ”放在透镜  $L_1$  的前焦面上，在同一透镜的后焦面上放置做成针孔的梳函数  $\Pi(x/a)$  的掩模，这时掩模的输出为

$$E_v = K \bar{A} \left( \frac{x}{\lambda f_1} \right) \Pi \left( \frac{x}{a} \right) \quad (9.8)$$

若用透镜  $L_2$ ，再进行傅里叶变换，则得

$$\mathcal{F}\{E_v\} = K' A \left( -\frac{f_1}{f_2} x_i \right) * \Pi \left( \frac{\alpha x_i}{\lambda f_2} \right) \quad (9.9)$$

在屏幕上能形成很多的“ $A$ ”的象。若把物体“ $A$ ”换成“ $AB$ ”，显然，屏幕上形成很多“ $AB$ ”的象。但是，如果把物体“ $AB$ ”的字与字之间的间隔扩大，则屏幕面上  $A$  的象相邻组的  $B$  的象发生重叠，当  $A$  和  $B$  的象刚好重合时，定下物体“ $A$ ”和“ $B$ ”之间的间隔。然后，如图 9.6 (c) 所示，把物体“ $AB$ ”换成“ $AA$ ”，则在屏幕面上形成很多“ $A$ ”和

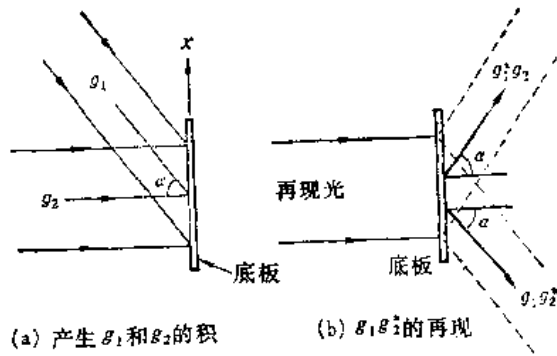
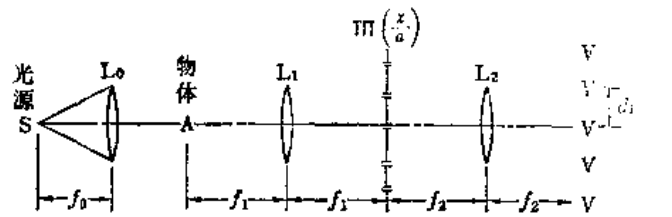
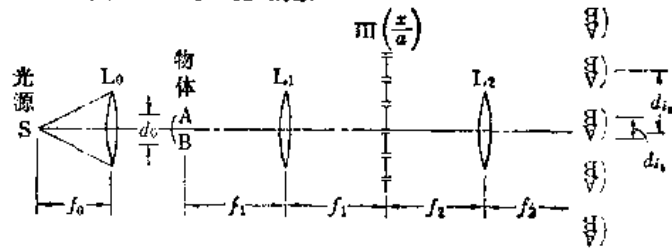


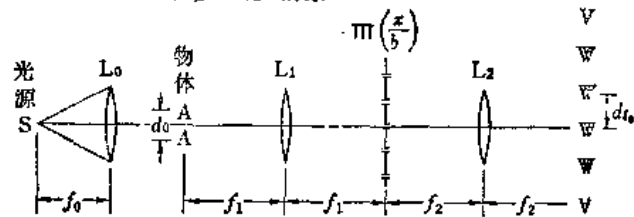
图9.5 利用底片的感光特性进行积的运算的方法



(a) 产生很多“ $A$ ”的象



(b) 产生很多“ $AB$ ”的象



(c) 将“ $AA$ ”的象作成很多  $A$  和  $A$  的重叠

图9.6 平均的运算方法

“A”重叠的两个“A”的和。

设物体为  $N$  个“AAA...A”，则在屏幕面上形成的一个一个A的象是  $N$  个A重叠而成的象，表示“A”的总和。

图 9.7 是使用二维输入图的情况，是图 9.6 (a) 说明的运算实例。一个透镜担负着傅里叶变换和成像两个作用。图 9.8 是将 100 个不完全的图样，通过平均，得到完全的图样的例子。

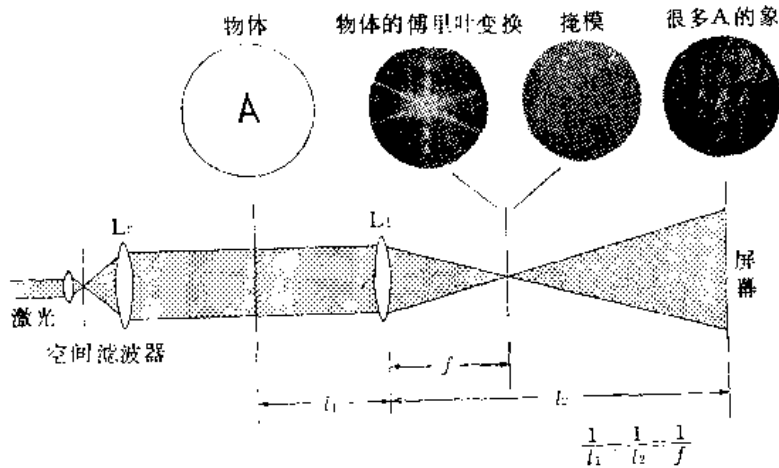


图9.7 造成物体“A”的许多象的方法

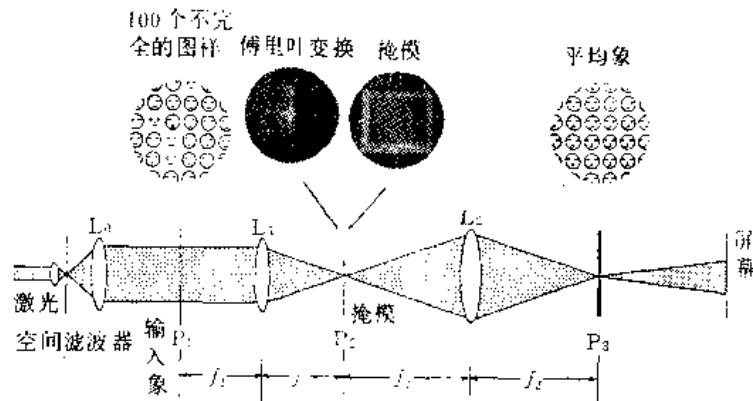


图9.8 100个图样的平均运算

### 9.2.5 微分的方法

本节讲述下式的运算方法

$$g'(x) = \frac{\partial}{\partial x} g(x) \quad (9.10)$$

其运算方法是在傅里叶变换面上进行运算，然后取反变换的方法。

将式 (9.10) 作傅里叶变换，则得

$$\mathcal{F}\{g'(x)\} = j2\pi f_x \cdot G(f_x) \quad (9.11)$$

所以，只要把  $G(f_x)$  入射到具有  $j2\pi f_x$  的透过率分布的掩模上就可以了。傅里叶变换值可

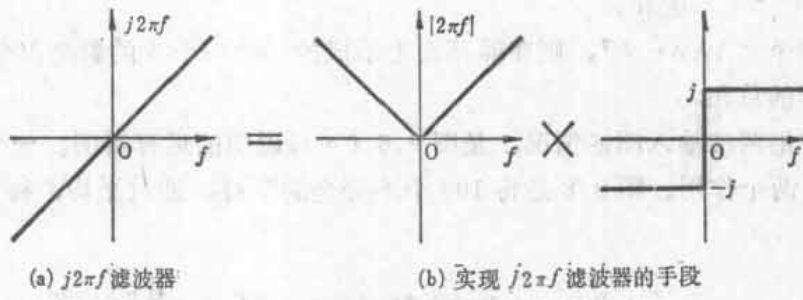


图9.9 微分运算用的“ $j2\pi f$ ”滤波器

取正负两值，为了实现负值，如图 9.9 所示，将两块掩模叠起来，一块掩模的透过系数做成与  $|2\pi f|$  成正比，另一块，做成在  $x$  的

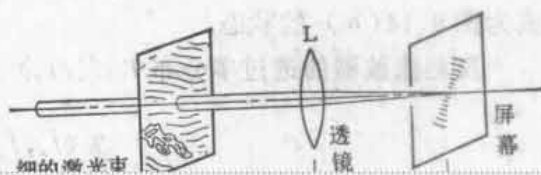
正的范围和负的范围中，其位相差为  $\pi$ 。光  $g(x, y)$   $j2\pi f_x$  掩模

频率区域滤波器，或空间滤波器。

空间滤波器有各种类型，下面，依次加以说明。

### 9.3.1 傅里叶光谱的解读

从海面航空照片获得海面风向的周期信息有如图 9.12 所示的方法，这是利用透镜的傅里叶变换功能，从傅里叶变换光谱中直接解读出所要



式 (9.14) 的傅里叶变换为

$$H(f_x) = e^{i2\pi a f_x} + e^{-i2\pi a f_x} = 2 \cos 2\pi a f_x \quad (9.15)$$

成为图 9.14(a) 的状态。

反相滤波器的透过率分布  $T(f_x, f_y)$  为

$$T(f_x, f_y) = \frac{1}{2 \cos 2\pi a f_x} \quad (9.16)$$

式 (9.16) 表示在图 9.14(b) 上, 由于有负的部分, 所以, 分成图 9.14(c) 所示的振幅分布和位相分布二块板来实现。

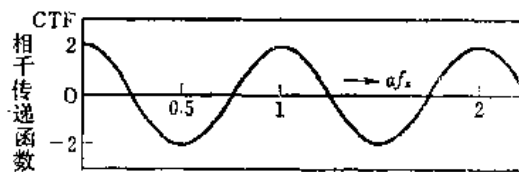
反相滤波器的原理是简单的, 但它具有下述的缺点。

(1) 透过系数有时如图 9.14(b) 那样成为无限大, 但是, 只要使用能动元件, 其透过系数最大为 1, 所以, 能用图 9.14(c) 所示的特性, 近似地实现。

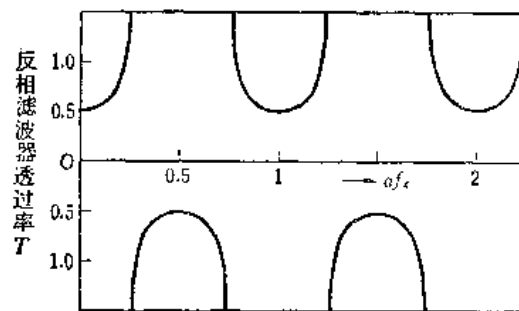
(2) 对于各个象, 必须分别设计反相滤波器。

(3) 必须使振幅板和位相板正确地对准。

(4) 当  $T(f_x, f_y)$  成为无限大其附近



(a) 相干传递函数(CTF)



(b) 反相滤波器透过率分布  $T$

当此值为最小时，滤波器的透过率分布  $T(f_x, f_y)$  为

$$T(f_x, f_y) = \frac{1}{H(f_x, f_y)} \cdot \frac{\Phi_{gg}(f_x, f_y)}{\Phi_{nn}(f_x, f_y) + |H(f_x, f_y)|^2} \quad (9.20)$$

式中， $H(f_x, f_y)$  称为系统的相干传递函数。 $\Phi_{gg}(f_x, f_y)$  和  $\Phi_{nn}(f_x, f_y)$  是信号和噪声的强度光谱分布 (power spectral density)，其值等于  $g(x, y)$  和  $n(x, y)$  的自相关函数  $R_{gg}(\xi, \eta)$ ， $R_{nn}(\xi, \eta)$  的傅里叶变换。即

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{gg}(f_x, f_y) &= \mathcal{F}\{R_{gg}(\xi, \eta)\} \\ \Phi_{nn}(f_x, f_y) &= \mathcal{F}\{R_{nn}(\xi, \eta)\} \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_{gg}(\xi, \eta) &= g \star g = \int g^*(x, y) g(x + \xi, y + \eta) dx dy \\ R_{nn}(\xi, \eta) &= n \star n = \int n^*(x, y) n(x + \xi, y + \eta) dx dy \end{aligned} \right\}$$

式 (9.20) 是维纳滤波器的透过率分布函数，式 (9.20) 的推导附在附录中。式 (9.20) 第一因子等于反转滤波器的透过率分布。第二因子是统计处理带来的因子。用反转滤波器的结果和用维纳滤波器的结果的比较见图 9.15。从图中可以看出，用维纳滤波器时，结果较好。

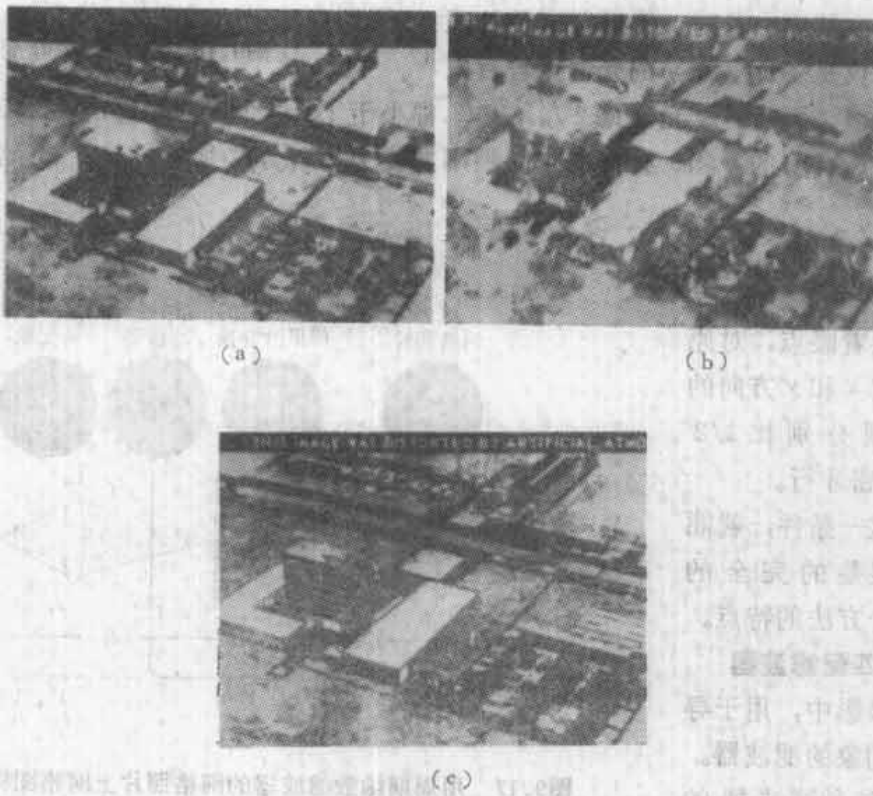


图9.15 反相滤波器与维纳滤波器的结果比较 (J.L.Horner)

(a)通过波动的大气而拍摄的照片 (b)照片(a)经反相滤波器处理所得的照片  
(c)照片(a)经维纳滤波器处理所得的照片

### 9.3.4 对应于周期函数的滤波器

若将筛网盖在原图上，就形成每隔一定间隔才能看清输入象之值的照片（取样的输入象）。印刷用的网格照片就是这种照片之一。下面讲述从这种照片取出基本原图的方法。这种方法也很适用于说明香农取样定理（Shannon sampling theorem）。

被取样的输入象可以用下式表示

$$g_s(x, y) = \text{III}\left(\frac{x}{a}\right)\text{III}\left(\frac{y}{a}\right)g(x, y) \quad (9.22)$$

若用透镜使这象作傅里叶变换，则

$$G_s(f_x, f_y) = a^2 \{ \text{III}(af_x)\text{III}(af_y) \} * G(f_x, f_y) \quad \left| f_x = \frac{x_i}{\lambda f}, f_y = \frac{y_i}{\lambda f} \right. \quad (9.23)$$

式中省略了系数，图 9.16 是表示式 (9.23) 的图形。图 9.17 表示使  $g(x, y)$  复原的光学系统。

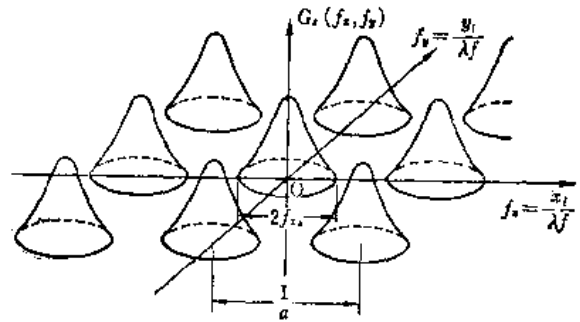


图9.16  $g_s$  的傅里叶变换

入射到图 9.17 所示的滤波器上的光是  $G(f_x, f_y)$  的函数，好似棋盘的格子那样，很多地排列着。其中的每一个，都是原图的傅里叶变换。用黑纸在其上开孔做成的滤波器，使其中之一透过。将其透过光再作反变换，使原图的输入函数  $g(x, y)$  复原，这时，能进行这种处理的必要条件不仅是  $G(f_x, f_y)$  的光谱宽若有限

(band limited)，而且，其光谱宽  $2f_{xs}, 2f_{ys}$  都小于  $1/a$ ，否则，相邻的  $G(f_x, f_y)$  会重叠起来。即原图所具有的  $x$  和  $y$  方向的空间频率宽度  $f_{xs}, f_{ys}$  必须满足以下的条件。

$$\frac{1}{a} \geq 2f_{xs}, \quad \frac{1}{a} \geq 2f_{ys} \quad (9.24)$$

如果式 (9.24) 中，以取样的间隔为主要着眼点，对原图取样时，其  $x$  和  $y$  方向的取样间隔必须分别比  $1/2f_{xs}, 1/2f_{ys}$  密才行。

若满足这一条件，就能复原成没有误差的完全的象，这是这个方法的特点。

### 9.3.5 匹配滤波器

这是在摄影中，用于寻找特定形状的象的滤波器。

图 9.18 表示这种滤波器的

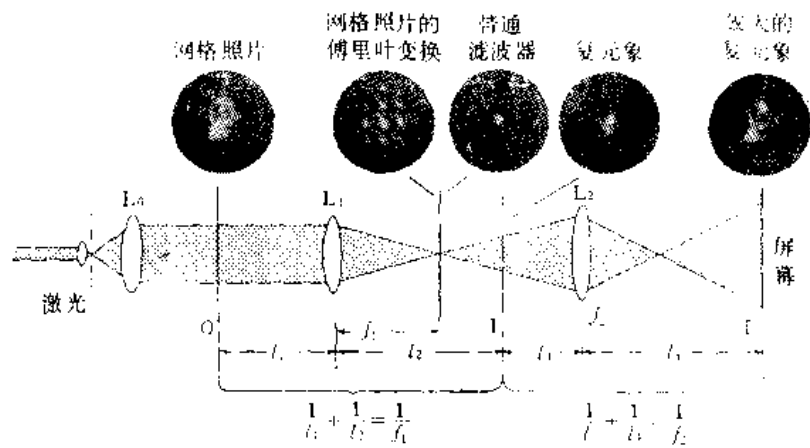


图9.17 用周期函数滤波器的网格照片上网格图样的消除

使用方法。在透镜  $L_1$  的后焦面  $P_2$  上，产生输入象  $g(x, y)$  的傅里叶变换值  $G(f_x, f_y)$ 。在  $P_2$  面上，放着探测用的掩模，若掩模的透过分布为  $G^*(f_x, f_y)$ ，则在输出光度计上的输出较大。在放置具有别的透过度分布的掩模时，输出光度计的输出就变小。所以，能够找出和



输入象成为一对的掩模。

若说得少许详细些，则掩模的透过率分布为  $G^*(f_x, f_y)$  时， $P_2$  面后方的透过光分布为

$$\underbrace{|G(f_x, f_y)| e^{i\phi(f_x, f_y)}}_{\text{输入象的傅里叶变换值}} \cdot \underbrace{|G(f_x, f_y)| e^{-i\phi(f_x, f_y)}}_{\text{滤波器透过率分布}} \quad (9.25)$$

从此式可以看出，只有在掩模的透过率分布为  $G^*(f_x, f_y)$  的情况下，输入象的傅里叶变换值的分布和滤波器的透过率分布能如图9.18那样很好重合。所以，与放入其他的掩模时相比，光度计的输出较大。而且，由于式(9.25)的位相值全部是零，所以，透过滤波器后的波面成为与滤波器平面平行的平行光线。透镜  $L_2$  的输出全部集中在输出光度计上，不仅对振幅这项，而且对位相项都有利于提高灵敏度。这种匹配滤波器也可以用于非相干光的情况下。但是，在这种情况下，由于无位相项的贡献，所以，其灵敏度比相干光时低些。

上述原理，可应用到图象中特定图形的检测上面。把从 a、b 两个字中选出一个字的方法作为例子，加以说明。

制造一个如图9.19所示的文字板，在此板的  $y$  轴的正方向离原点为  $l$  的地方，写着 a 字。在  $y$  轴的负方向，离原点为  $l$  的地方，写着 b 字。

设文字 a 和 b 的透过率分布分别是  $a(x, y)$ ， $b(x, y)$ ，则文字板的透过率分布可用下式表示

$$a(x, y - l) + b(x, y + l)$$

若把这文字板放在图 9.19 的透镜  $L_1$  的前焦面上，则在其后焦面上可得到其傅里叶变换值。即

$$e^{-i2\pi y l} A(f_x, f_y) + e^{i2\pi y l} B(f_x, f_y)$$

式中

$$\mathcal{F}\{a(x, y)\} = A(f_x, f_y)$$

$$\mathcal{F}\{b(x, y)\} = B(f_x, f_y)$$

将透过率分布为  $A^*(f_x, f_y)$  的匹配滤波器放在后焦面上，进一步作傅里叶变换，则得

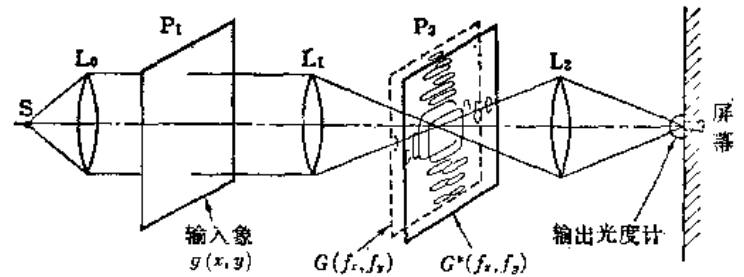
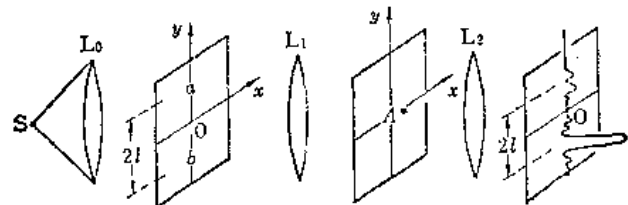
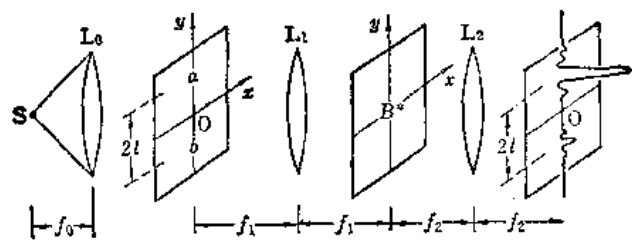


图9.18 匹配滤波器的作用说明



(a) 文字 a 的检出



(b) 文字 b 的检出

图9.19 用匹配滤波器作文字位置检出

$$a^*(x, y) * a(-x, -y - 1) + a^*(x, y) * b(-x, -y + 1) \\ = [a(x, y) \star a(x, y - 1) + a(x, y) \star b(x, y + 1)]^* \quad (9.26)$$

式中应用了相关函数的定义式(8.30)。而式(9.26)的第一项是文字a的自相关函数,根据定义为

$$a(x, y) \star a(x, y - 1) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(\xi, \eta) a^*(\xi - x, \eta - y - 1) d\xi d\eta \quad (9.27)$$

若把文字的透过分布看成集中的,则 $x = 0, y = -1$ 时,最大值取

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |a(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$$

第二项是文字a和b的相关,根据定义是

$$a(x, y) \star b(x, y + 1) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(\xi, \eta) b^*(\xi - x, \eta - y + 1) d\xi d\eta$$

若考虑文字的透过分布是集成的,则 $x = 0, y = 1$ 时,极大值取

$$\iint_{-\infty}^{\infty} a^*(\xi, \eta) b(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

此值比 $x = 0, y = -1$ 点的峰值小。因此,如图9.19(a)所示,在 $(0, -1)$ 处形成大的峰值,在 $(0, 1)$ 处,形成小的峰值。

下面,若将透过分布换成 $B^*(f_x, f_y)$ 的匹配滤波器,用同样的计算可得

$$[b(x, y) \star a(x, y - 1) + b(x, y) \star b(x, y + 1)]^* \quad (9.28)$$

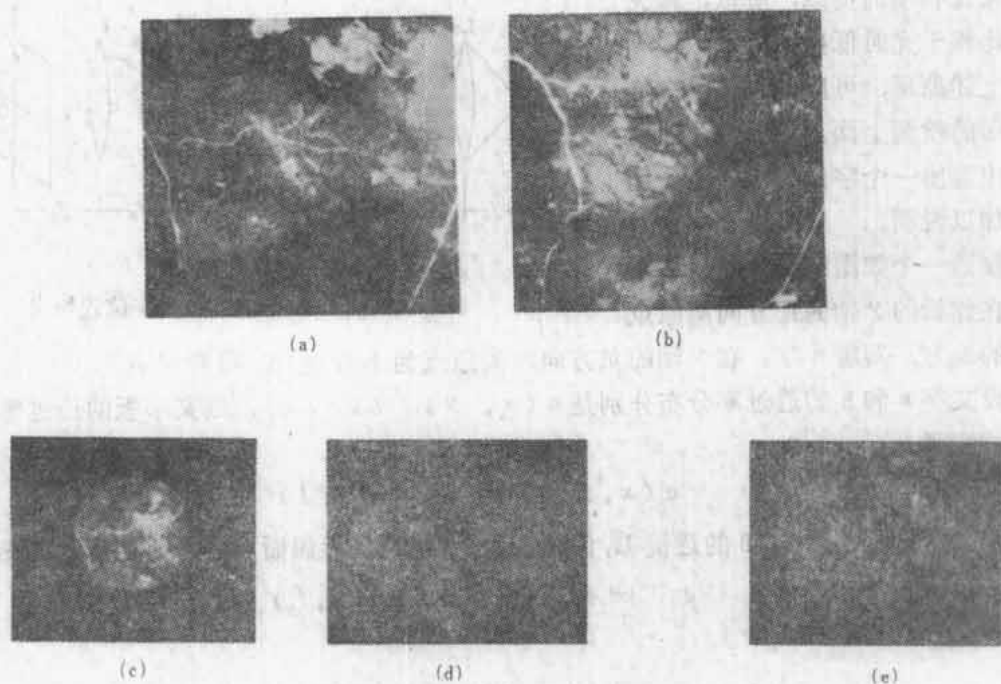


图9.20 卫星照片上云的运动可作为相关峰值随时间的变动来加以测定

(a)最初状态的天气图 (b)拍摄(a)后,过一定时间拍摄的照片 (c)是(a)图中的一部分云,跟踪这云的运动 (d)是(a)和(c)的相关峰值 (e)是(b)和(c)的相关峰值,由(d)和(e)中峰值位置的移动量可知道风速

此式，如图 9.19 (b) 所示，在  $(0, -1)$  处形成小的峰值，在  $(0, 1)$  处形成大的峰值。峰值的位置移动，于是，用匹配滤波器能够检出所希望的文字位置。

图 9.20，是用匹配滤波器，从人造卫星 ATS III 的天气图上，测定云相关峰值在时间上的位置变化，从而去求出风速。图 9.21 是通过图 (a) 中小圆包围部分和整个天气图的相关峰值，根据峰值的移动作出图 (b) 所示的风速矢量图的例子。

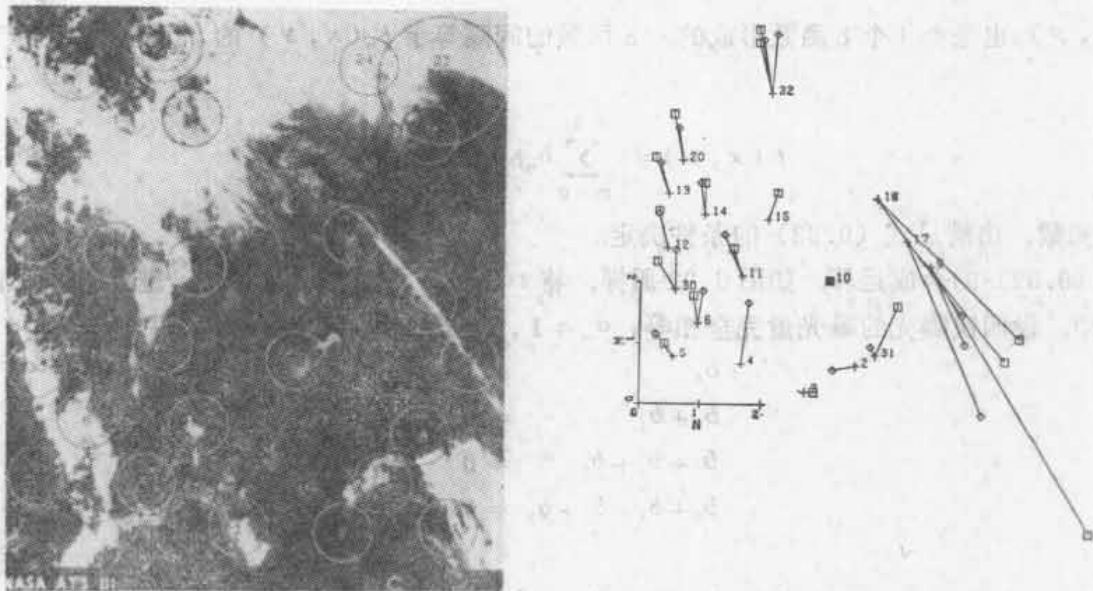


图 9.21 由 ATS III 的天气图上的云的相关峰值制作的风速图 (A. Vander Lugt)

(a) 作出图中用小圆标明部分的云图和整个天气图的相关峰值，根据其变动确定该点的风速，作出图 (b) 所示的矢量图 (b) 把相关峰值的移动画成矢量图

### 9.4 卷积滤波器

这是将滤波器本身放在傅里叶变换面  $(f_x, f_y)$  上的滤波器。在设计此滤波器的阶段中，有时候在傅里叶变换面考虑倒不如在  $x, y$  面考虑时，理论上简单明了些，卷积滤波器就属于这类。

下面，以四重曝光的照片的复原为例来说明这种滤波器。

由于使用照相机的错误，以间隔  $\Delta$  重复曝光了四次，照片的点象响应函数如图 9.22 所示，由 4 个  $\delta$  函数构成，可以用下式表示

$$h_w(x, y) = \sum_{n=0}^3 a_n \delta(x - n\Delta)$$

(9.29)

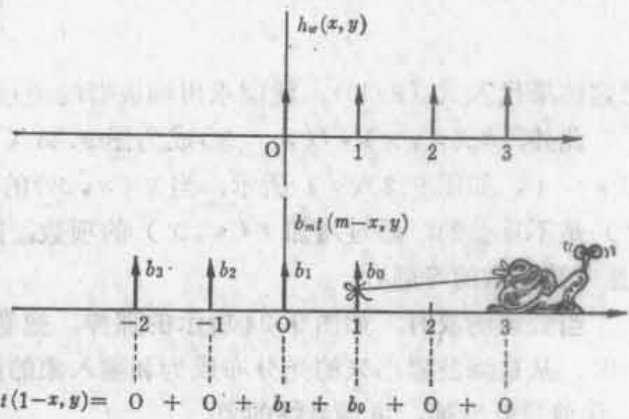


图 9.22  $h_w(x, y) * b_m t(m-x, y)$  的运算

形成的象的光分布为

$$u_w(x, y) = g(x, y) * h_w(x, y) \tag{9.30}$$

目的是从式 (9.30) 求得  $g(x, y)$ , 但是, 其求法可以考虑成求通过和  $u_w(x, y)$  合成, 能形成  $g(x, y)$  的那种未知函数  $t(x, y)$ , 即

$$u_w * t = g * h_w * t = g \quad (9.31)$$

式中省略了  $(x, y)$  的符号

为了使式 (9.31) 成立, 必须

$$h_w * t = \delta(x) \quad (9.32)$$

设  $t(x, y)$  也是由 4 个  $\delta$  函数形成的,  $\delta$  函数的间隔等于  $h_w(x, y)$  的间隔, 则可用下式表示

$$t(x, y) = \sum_{m=0}^3 b_m \delta(x - m\Delta) \quad (9.33)$$

$b_m$  是未知数, 由满足式 (9.32) 的条件决定。

式 (9.32) 的合成运算, 如图 9.22 那样, 将  $t(x, y)$  左右颠倒过来, 进行相乘, 向右方移动, 设四次曝光的曝光量完全相等。  $a_m = 1$ , 则式 (9.32) 成为和

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_0 + b_1 &= 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 &= 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \end{aligned}$$

或

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

的联立方程式。这式的解, 直接由式 (9.34) 求得

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= -1 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

把这结果代入式 (9.33), 就能求出滤波器的透过函数。此函数如图 9.23 (a) 所示。

此外,  $h_w(x, y) * t(x, y)$  成为图 9.23 (b) 所示的两个  $\delta$  函数。剩余的一个形成在  $x = 4$ , 如图 9.23 (c) 所示, 当  $g(x, y)$  的幅度变宽时, 经滤波的象  $u_w(x, y) * t(x, y)$  是不重叠的, 通过增加  $t(x, y)$  的项数, 能够扩大图 9.23 (b) 的两个  $\delta$  函数的间隔 (参考第九章的习题)。

当处理图象时, 如图 9.24 所示的那样, 把卷积滤波器  $T(f_x, f_y)$  放在透镜  $L_1$  的后焦面上时, 从这滤波器出来的光分布成为和输入象的傅里叶变换值  $H_w(f_x, f_y)$  的积, 再用透镜  $L_2$  作傅里叶变换, 可得最终的象。

滤波器本身的制作方法表示在图 9.25 上, 由透镜  $L_0$  和  $L_1$  产生参考光源, 而物光束部分是放置着间隔为  $\Delta$  的两个针孔, 一个针孔上再放一个半波长片以产生逆位相。

图 9.26 是使用卷积滤波器处理四重曝光照片的例子。

关于曝光过程中由于照相机抖动而拍成的模糊照片的复原,可以看成连续性的多重曝光。所以,也可以应用以上的滤波器的设计法,即,只要将上面求得的滤波器的多重曝光的间隔  $\Delta$  尽可能地缩小就可以了。

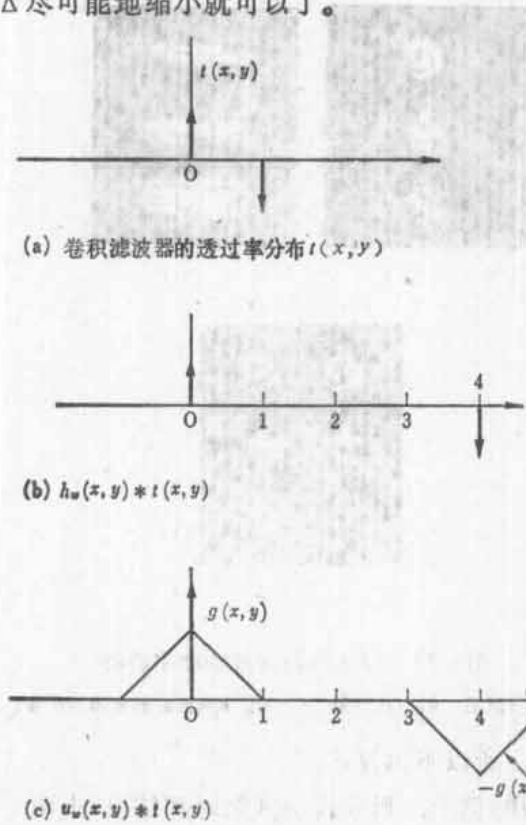


图9.23 使4次曝光象复原的卷积滤波器的设计

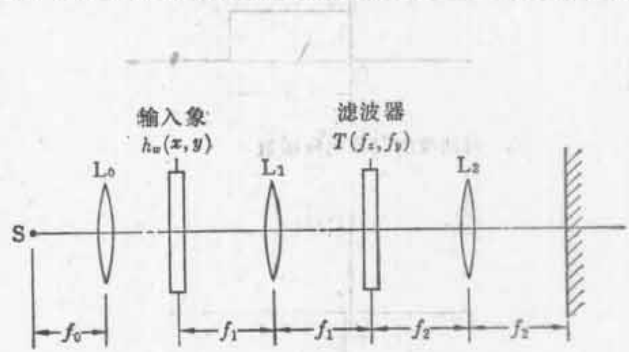


图9.24 用于4次曝光象复原的光学系统

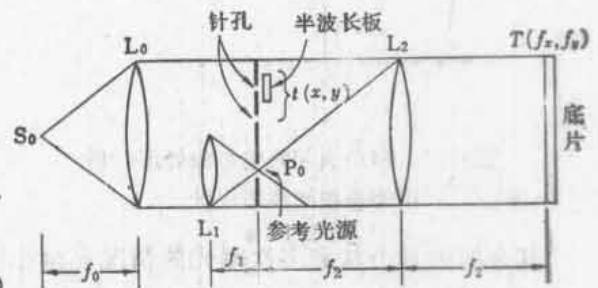


图9.25 透过率分布  $T(f_x, f_y)$  的滤波器的制作



(a)



(b)

图9.26 4次曝光照片的复原

(a) 4次曝光的照片 (b) 使用卷积滤波器对(a)处理后的照片

图9.27 (a) 表示移动象的点象响应函数  $h_b(x, y)$  同图 (b) 表示移动象处理用的卷积滤波器的透过分布函数  $t(x, y)$ 。  $t(x, y)$  和  $h_b(x, y)$  的合成表示在图 (c) 上。

设移动象的分布函数为  $u_b$ , 则

$$u_b = g * h_b \tag{9.36}$$

$u_b$  和  $t$  的合成成为

$$\begin{aligned} u_b * t &= g * h_b * t \\ &= g * \delta(x) = g \end{aligned} \tag{9.37}$$

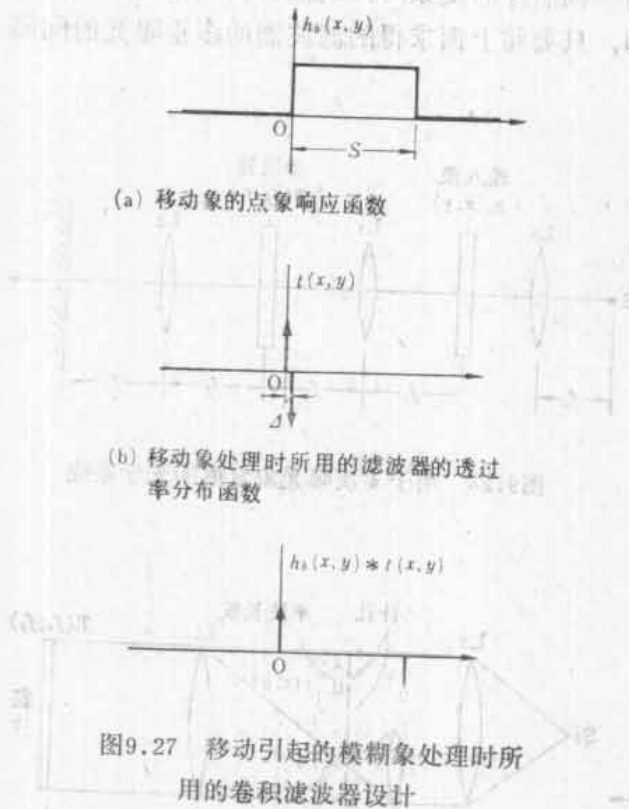


图9.27 移动引起的模糊象处理时所用的卷积滤波器设计

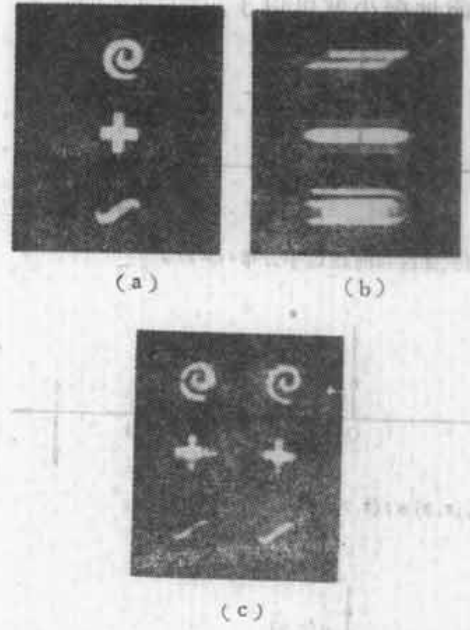


图9.28 用卷积滤波器处理移动象

(a)原图 (b)移动象 (c)用卷积滤波器处理后的象

其余的处理方法和多次曝光的情况完全相同的，所以不再复述。

图 9.28 是利用这种方法制成的卷积滤波器处理的例子，形成抖动开始时和结束时 两个再现象。

### 9.5 非相干光的处理

使用非相干光源的光信息处理，由于无位相的贡献，故与使用相干光的情况相比，灵敏度一般低些。但是，它没有象相干光的情况那样要将输入象先转移到摄影片板等光学性的平面上的这种麻烦，可以将纸张等表面上的象直接作为输入象使用。

#### 9.5.1 多孔式针孔照相机

针孔照相机、焦深大，也能用于可见光以外的光线：X射线、γ射线。但是，透过的能量少。为了改善这缺点，使用多孔针孔照相机，其象是由多个针孔的象叠加而成的，好似多重曝光的照相。但是，针孔的位置是随机的，所以，和多重曝光的照相的处理方法有些不同。

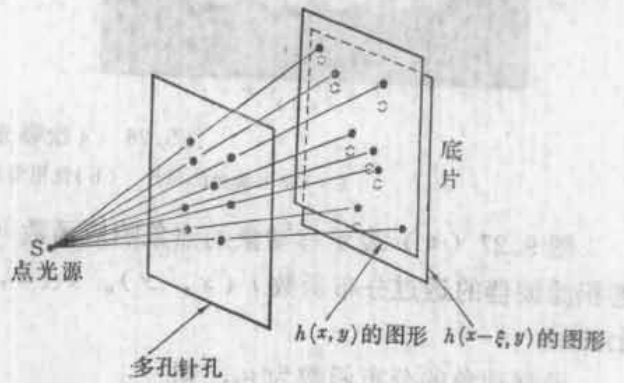


图9.29 多孔针孔的点象响应函数 $h_m(x, y)$

与少许错开的点象响应函数 $h_m(x - \xi, y)$ 。

$$\text{显然 } h_m(x, y) \star h_m(x, y) = \delta(x)$$

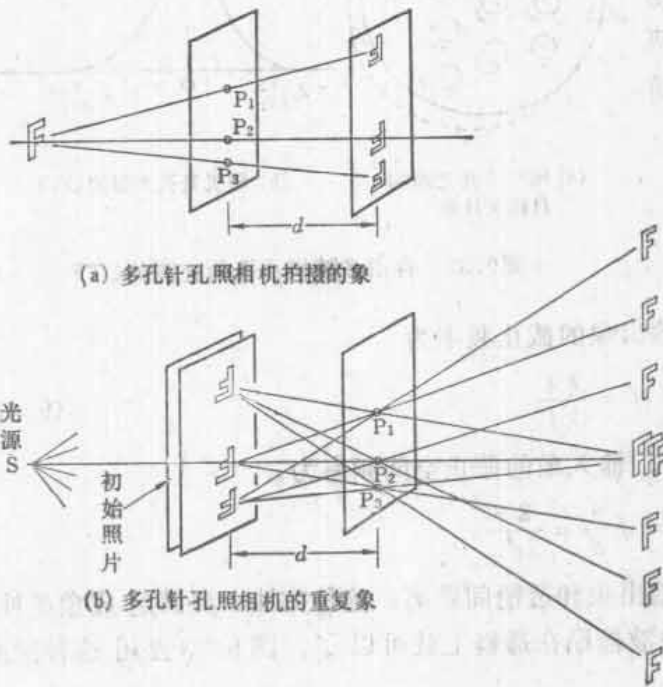
图 9.29 表示多孔针孔照相机的响应函数  $h(x, y)$ 。图 9.30 (a) 表示利用这种照相机拍摄用非相干光照明的被摄体  $I_0(x, y)$  时的装置图。



$$I_m(x, y) = I_0(x, y) * h_m(x, y) \quad (9.38)$$

式中 将  $|h(x, y)|^2 = h_m(x, y)$  仍称为点象响应函数, 形成的象的数目刚好等于孔的数目。

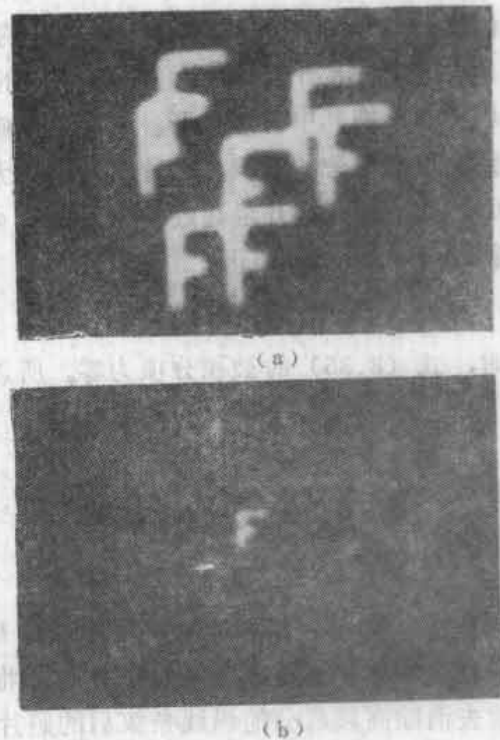
在这张照片上形成叠象时, 要使用和摄影时使用的同样特征的多孔针孔照相机。图9.30 (b) 表示其装置情况, 叠象的光度分布为



(a) 多孔针孔照相机拍摄的象

(b) 多孔针孔照相机的重复象

图9.30 用同样的多孔针孔照相机把多孔针孔照相机的象形成重复象



(a)

(b)

图9.31 多孔针孔照相机的摄影  
(a)七个针孔所拍摄的照片 (b)使用上述相同的针孔的再现象

$$I_c(x, y) = I_0(x, y) * h_m(x, y) * h_m(-x, -y) \quad (9.39)$$

当  $h_m(x, y)$  是实数时

$$I_c(x, y) = I_0(x, y) * [h_m(x, y) \star h_m(x, y)] \quad (9.40)$$

式 (9.40) 中, 若能证明  $h_m(x, y) \star h_m(x, y)$  是  $\delta$  函数, 则  $I_c(x, y)$  就是  $I(x, y)$ 。

如图 9.29 所示,  $h_m(x, y)$  是放置点光源时, 底板面上拍摄的象, 是由随机排列的明亮的点所构成的。为了计算式 (9.40) 的相关函数, 只要作出在  $x$  方向错开  $\xi$  的象和原来的象的积; 即  $h_m(x - \xi, y) h_m^*(x, y)$ 。则  $\xi = 0$  的场合, 全部明亮的点都重合, 所以, 积的值成为最大。随着  $\xi$  的增加, 积的值减少。若  $\xi$  的值扩大到大于亮点的直径, 那么由于点是随机排列的, 所以, 积的值为零。很明显, 相关函数表示出和  $\delta(\xi) \delta(\eta)$  有相似的性质。

若用图 9.30 所示的光线的路径, 可以更直观地说明此原理; 用图 9.30(a) 所示的三个针孔拍摄时, 形成三个象, 用图 9.30 (b) 所示的同样的针孔重复拍摄上面形成的象时, 可形成九个象。设图 9.30 (a) 的距离  $d$  和图 9.30(b) 的距离  $d$  相等, 则, 其中的三个象就成在同一个位置上, 重复的针孔数越多, 则这重复象越鲜明。

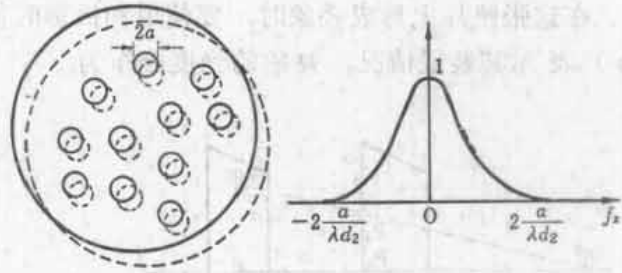
图 9.31 表示用多孔针孔照相机拍摄的照相及其复原的象。

9.5.2 多孔光瞳低通滤波器

若将开着随机小孔的光瞳重叠在透镜上使用，就能形成截止高的空间频率的象。

截止的空间频率可以由这个光瞳的光学传递函数求出。光学传递函数是瞳函数的自相关函数，可以由式 (8.36) 求出。但也可以和图 8.4 的例子一样，参考图 9.32(a) 求出。设有计算 OTF 用的两块光瞳，把其中一块错开，求错开的光瞳的重叠部分的面积，随着错开量增大，面积减小，若错开量超过小孔直径  $2a$ ，就没有重叠面积，即，当

$$\lambda d_2 \xi \geq 2a$$



(a) 随机开孔光瞳的自相关计算

(b) 随机开孔光瞳的 OTF

图9.32 有很多随机小孔的光瞳的OTF

时，式 (8.35) 的被积分项为零。所以输出象的截止频率为

$$f = \frac{2a}{\lambda d_2} \tag{9.41}$$

此外，输入象的大小是输出象的  $d_1/d_2$  倍，输入象的截止空间频率为

$$f_0 = f \frac{d_2}{d_1} = \frac{2a}{\lambda d_1}$$

式中  $d_1$  是输入象和透镜间距离， $d_2$  是输出象和透镜间距离。这种方法，要满足成象条件，只要在物体、透镜、光屏安排好，将滤波器贴在透镜上就可以了。图 9.33 是用这种滤波器去消除高频成分的纵线条纹后的照片。



(将方框部分放大) 的照片

(a) 由纵条纹形成的照片



(将方框部分放大) 的照片

(b) 用多孔光瞳处理后，除去了纵条纹的照片

图9.33 用多孔光瞳低通滤波器的处理



## 9.6 非相干光的匹配滤波器

用相干光做成的匹配滤波器，也能原封不动地适用于非相干光，这点在 9.3.5 节中已稍微讲过一点，但是，非相干光滤波器，只能看式 (9.25) 的匹配条件中的光强分布是否一致，不能利用位相信息。这种方法的优点，前面已经说过，输入象不必做成发光体的形式，或用反射光做成底板，而且，对象的位置也不比相干光的场合敏感，这也是优点之一，其缺点是灵敏度差，和别的光学处理组合较困难。

图 9.34 表示非相干光匹配滤波器的光学系统，可以看出，它和相干光的情况下的图 9.18 的方式是相同的。此外，匹配滤波器用相干光，并用制造相干光滤波器同样的方法制成后，通过与随机移相器组合，可以消除位相信息。当输入象的位相不是随机的時候，可以把随机移相器加到输入象上。

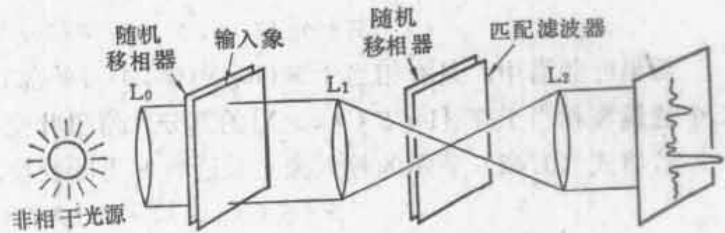
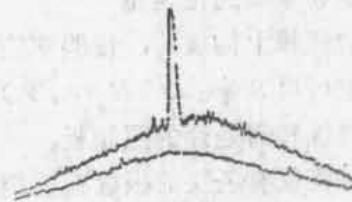


图 9.34 非相干光匹配滤波器的光学系统

用图 9.34 所示的光学系统进行象的检测，其结果表示在图 9.35(a) 上。从图 9.35 的漫画上可以看出人物的位置，照片下面的亮点是相关函数的峰值。用光度计测定此峰值附近的光强分布其结果表示在图 9.35(b)。



(a)



(b)

图 9.35 使用非相干光匹配滤波器检测的结果

(a) 用非相干光匹配滤波器测定右边漫画的位置，下面亮点是自相关值

(b) 在自相关值较大的点子附近，用光度计记录的值

## 9.7 对数滤波

下面说明一下利用具有对数滤波特性的滤波器进行图象处理的对数滤波问题。

对数滤波在改善象质方面只是在以下情况时才起作用，也就是噪声  $N(x, y)$  和信号  $S(x, y)$  以积的形式  $S(x, y)N(x, y)$  呈现在象中时，例如，不均匀照明时拍摄的照片，就属于这一类。

下面说明对数滤波法。即光强分布用式 (9.42) 表示的象中除去噪声的方法。

$$g(x, y) = S(x, y)N(x, y) \quad (9.42)$$

用具有对数感光特性的干板拍摄用式 (9.42) 表示的象时, 干板的透过率分布为

$$t(x, y) = \log S(x, y) + \log N(x, y) \quad (9.43)$$

即用具有对数特性的干板摄影时, 透过率成为信号项和噪声项之和的形式。

然后, 用透镜产生  $t(x, y)$  的傅里叶频谱。

$$\mathcal{F}\{\log S(x, y)\} + \mathcal{F}\{\log N(x, y)\} \quad (9.44)$$

傅里叶频谱中, 只有相当于  $\mathcal{F}\{\log N(x, y)\}$  的部分, 被不透明的吸收膜去掉, 若用第二个透镜将相当于  $\mathcal{F}\{\log S(x, y)\}$  的部分作傅里叶变换, 就可以取出信号  $\log S(x, y)$ 。

若将式 (9.42) 表示的输入象直接进行傅里叶变换, 可得

$$\mathcal{F}\{S(x, y)\} * \mathcal{F}\{N(x, y)\} \quad (9.45)$$

当信号和噪声分离时, 用式 (9.44) 所示的和的形式有利, 还是用式 (9.45) 所示的合成的形式有利, 必须由信号和噪声的性质决定, 不能一概而论。但是, 一般来说, 和的形式较为有利。

图 9.36 表示用对数滤波法去掉条纹的方法, 需处理的照片是将条纹的掩模重叠在脸部的照相上构成的, 设脸部的分布函数为  $S(x, y)$ , 条纹的分布函数为  $N(x, y)$ ,

则输入函数可用  $S(x, y)N(x, y)$  表示, 操作的顺序, 用具有对数特性的干板, 准备好仅有条纹的板和需处理的照相板。

首先, 将仅有条纹的板放在透镜  $L_1$  的前焦面上, 在其后焦面上就形成其傅里叶频谱  $\mathcal{F}\{\log N(x, y)\}$ 。在后焦面上, 放透明玻璃板, 仅仅在不存在频谱的地方, 涂上不透明的吸收膜, 做成掩模  $M$ 。

然后, 将此掩模  $M$  放在透镜  $L_1$  的后焦面上, 将需要处理的相片放在透镜  $L_1$  的前焦面上, 把噪声的频谱  $\mathcal{F}\{\log N(x, y)\}$  遮住。使其余的频谱射到透镜  $L_2$  上, 在透镜的后焦面上放干板。使用的是具有指数函数特性的干板, 就可得到输出象。

图 9.37 (a) 表示输入象, 图 9.37 (b) 表示去掉条纹后的象。这种方法必须使用具有对数和指数感光特性的底板。要得到这种特性的底板, 方法之一是利用网格摄影底板, 先用网格摄影底板拍摄原图以后, 再用普通底板重复拍摄, 只要根据经验, 调正两次重复的曝光量, 就能得到对数感光特性。

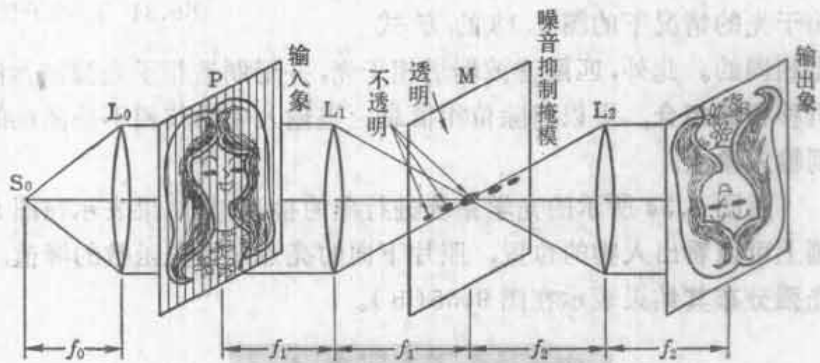


图9.36 对数滤波法

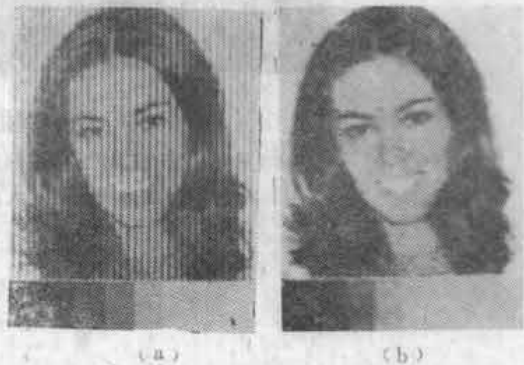


图9.37 原图(a)与对数滤波的结果(b)

(H.Kato and J.W.Goodman)

## 习 题

习题 9.1 在 9.4 节中, 点象响应函数由四个  $\delta$  函数形成, 若用八个  $\delta$  函数, 情况如何?

习题 9.2 在分析四重曝光的照相时, 是假定  $a_m = 1$ , 当  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$  时, 曝光将如何变化?

习题 9.3 在 9.5.2 节叙述的多孔光瞳滤波器中孔是开在随机位置上的, 试说明其理由。若以间隔  $b$ , 象棋盘的格子那样开孔, 将如何变化?

习题 9.4 从图 9.37 所示的带有条纹的照片上去掉条纹的方法, 可以用 9.3.4 节中讲的周期函数滤波器的方法, 和 9.7 节讲述的对数滤波的方法两种, 比较一下在两种情况下, 取样间隔  $a$  的限制问题。

习题 9.5 如图 9.38 所示的关在铁笼中的老虎照片, 想要通过对此照片作图象处理而制成野外的老虎照片, 设计两个使用相干光的光学系统, 一个使用非相干光的光学系统。

其中  $a = 0.4\text{mm}$      $b = 0.5\text{mm}$

$c = 20\text{mm}$      $d = 10\text{mm}$

老虎照片的傅里叶频谱的最高频率  $f_s = 0.8$   
线对/mm

所用透镜的焦距  $f = 1000\text{mm}$

所用光的波长  $\lambda = 0.6\mu\text{m}$

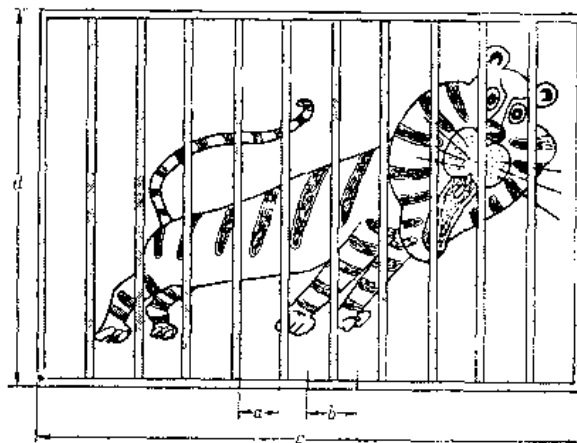


图 9.38 铁笼中老虎的图

## 文 献

- (1) R. G. Eguchi and F. P. Carlson, "Linear Vector Operation in Coherent Optical Data Processing Systems", *Appl. Opt.*, Vol. 9, pp. 687~694, 1970.
- (2) J. L. Horner, "Optical restoration of images blurred by atmospheric turbulence using optimum filter theory", *Appl. Opt.*, Vol. 9, pp. 167~171, 1970.
- (3) A. Vander Lugt, "Coherent optical processing," *Proc. IEEE*, Vol. 62, pp. 1300~1319, 1974.
- (4) D. P. Jablonowski and S. H. Lee, "Restoration of degraded images by composite gratings in a coherent optical Processor" *Appl. Opt.*, Vol. 12, pp. 1703~1712, 1973.
- (5) A. Wouters, K. M. Simon, and J. G. Hirschberg, "Direct method of decoding multiple images," *Appl. Opt.*, Vol. 12, pp. 1871~1873, 1973.
- (6) A. W. Lohmann and H. W. Werlich, "Incoherent matched filtering with Fourier holograms," *Appl. Opt.*, Vol. 10, pp. 670~672, 1971.
- (7) M. Francon, "Modern applications of physical optics," John Wiley and Sons, N. Y. 1963.
- (8) H. Kato and J. W. Goodman, "Nonlinear filtering in coherent optical systems through halftone screen processes," *Appl. Opt.*, Vol. 14, pp. 1813~1824, 1975.
- (9) I. McCausland, "Introduction to optimal control," John Wiley and Sons, N. Y. 1969.
- (10) W. B. Davenport Jr. and W. L. Root, "An introduction to the theory of random signals and noise," McGraw-Hill Book Comp. N. Y. 1958.
- (11) P. Beckmann, "Probability in communication engineering," Harcourt, Brace and World Inc. N. Y. 1967

## 第十章 微波全息学

全息学的原理，不仅对光，而且对同样是波动的电波和声波也能应用。光波也好、电波也好、声波也好，在波动这点上是共同的，但其他的物理性质是不同的。例如，光在不透明的电介质中不能通过，而电波或声波却能通过。而且由于波长的长度相差达  $10^8$  倍，干涉间隔的位数相差也很大，所以能非常简单地得到位相稳定性高的振荡器。

### 10.1 记录微波电场分布的手段

微波全息术有用电波产生全息图，再用电波进行再现和将形成的全息图缩小后用激光进行再现这样二种情况。然而，无论那种情况，光全息术都可以利用照相底板简单地记录光强分布。但对于微波却没有相当于这种照相底板的東西，所以，采用了各种各样的记录方法。

下面，依次介绍各种记录方法。

#### 10.1.1 用探头扫描的方法

图 10.1 表示将探头天线沿着边线纵横扫描，将其输出检波放大，使小电珠亮暗的方法。只要将小电珠和探头天线做成一体进行扫描，这时，在暗室中，打开照相机，当扫描结束时，就能将电波的强弱分布拍摄在一张相片上。

通过提高放大器的灵敏度，可以用于非常微弱的电场，其灵敏度比其他方法高  $60 \sim 70$  dB。但由于机械振动等原因，扫描速度受限制，延长了扫描时间，这是其缺点。



图10.1 扫描电场分布记录法

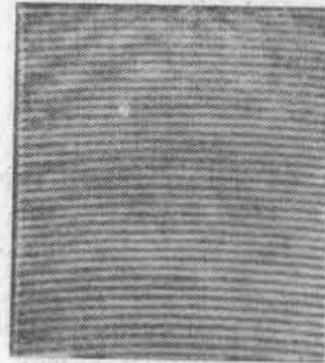


图10.2 探头扫描方法作出的微波电场图

它和其他扫描机构的不同点是可以做成探头按螺旋形或圆柱形等形式移动。同时，也有做成探头不动而物体移动或两者都移动的形式。

#### 10.1.2 加热变色的应用

以下讲述的方法，都是不作扫描而一次成图的方法。所有方法都是利用微波的电介质损耗产生热效应的方法。



将微薄的吸收膜放在电场  $E$  中, 就产生电流密度  $I = \sigma E$  的感应电流, 使吸收薄膜与这感应电流的二次方成正比地加热, 此热量对温度变化敏感的介质产生作用。

首先, 第一个方法是用浸过盐酸钴 ( $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ) 的试纸方法, 这试纸普通是桃红色的, 但是, 被微波照射后, 温度上升, 变成青色。图 10.3 是用这种试纸使喇叭形辐射天线及波导管的电场分布成图的实例。

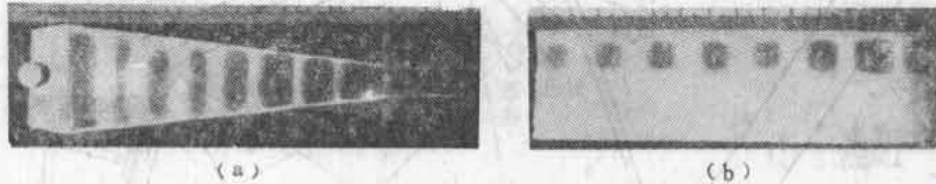


图10.3 用盐酸钴使电场分布成图的方法

(a)喇叭形辐射天线的内部所呈图形 (b)波导管内部所呈图形

第二个方法是利用波拉罗伊德底片<sup>⊖</sup>的显象速度随温度而增加这一特性来进行。当波拉罗伊德底片通过狭的滚筒时, 显影液在负片和正片之间均匀扩展, 开始显影。若在显影过程中将这种底片放在微波中, 由于显影液是水溶性的, 导电体的损耗大, 微波被吸收, 温度就升高, 温度升高部分的显影速度加快, 只要将正片和负片及早分离, 使显影停止, 就能形成随微波的强度而变的浓淡不一的条纹。图 10.4 是用 58 型波拉罗伊德底片制成图的实例。灵敏度是  $10 \sim 20 \text{mW/cm}^2$  左右。

第三种方法是利用胆固醇液晶 (cholesteric liquid crystal) 随温度变化而灵敏地变色的性质来进行的。只要将液晶涂在微波吸收膜上就行。方法很简单, 灵敏度达  $10 \text{mW/cm}^2$  左右。

第四种方法是用光色材料 (photochromics)<sup>⊖</sup>的方法。光色材料薄膜受紫外线照射时就成为深蓝色, 当去掉紫外线时, 颜色就退掉。而且, 退色速度是温度越高越快。

光色材料<sup>⊖</sup>是无粒子的。所以, 当激光按原来位置照射到形成的全息图上时, 能够立即使象再现。这是其优点。



图10.4 用波拉罗伊德法得到的电场图

### 10.1.3 热显示的方法

这是用热象照相机 (thermal vision camera) 拍摄受微波照射的吸收膜温升的方法。

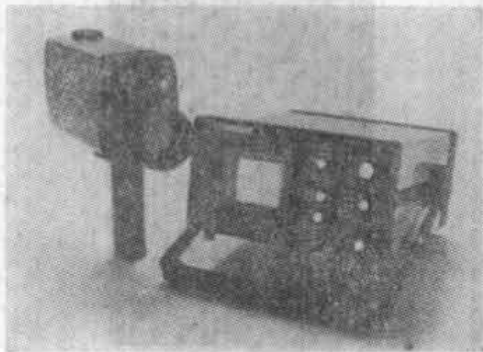


图10.5 热象仪

热象仪的机构和电视摄影机是完全相同的, 唯一的不同点是波长灵敏度分布中心不是可见光而在红外线区域。图 10.5 表示热象仪的外貌, 它具有从几米以外检测出  $0.05^\circ\text{C}$  的温差能力。

### 10.1.4 测定表面膨胀的方法

这是当微波照射在吸收体上时, 吸收体表面产生微小的热膨胀, 高精度测定这微小变化的方法、对于热膨胀系数大的介质, 必须制作微波吸收板, 这可用炭混入石蜡或硅橡胶中做成这种板。

对微小变化的测定, 首先有 7.6.5 节叙述过的全息学的方法。图 10.6 是说明这方法的

⊖ 是一种在拍照后立即自行显象的底片称波拉罗伊德底片 (Polaroid film)——译者注

⊖ 光色材料是一种随入射在其上的光强大小而改变颜色的透明材料——译者注

原理图，斜线部分是微波全息术系统，无斜线的部分是光干涉全息术系统，利用微波系统工作时和不工作时的吸收板表面的干涉全息图，就能得到表面膨胀的图形。

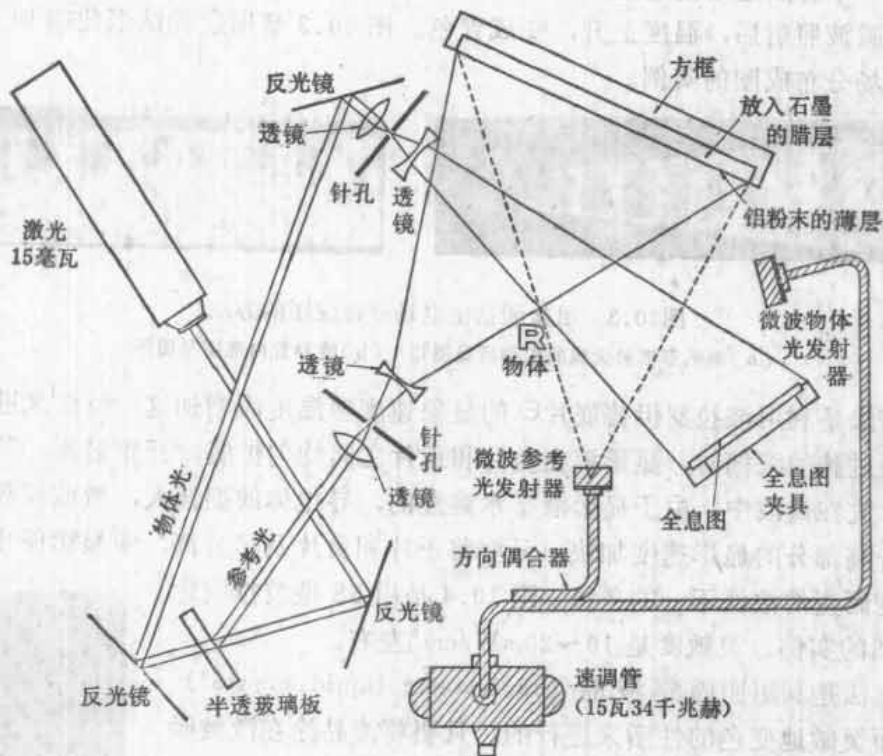


图10.6 利用光干涉全息术测量吸收体表面微小膨胀而作成微波图的方法

图 10.7(b) 是这种方法得到的图形，(a) 是铝板作为被摄体，(c) 是其微波全息图的再现象。和这种方法类似的方法还有莫尔条纹 (moiré) 测定表面膨胀的方法。这种方法用条纹状的光照明微波吸收板表面而制成二次曝光照片，即首先在微波系统不工作时拍摄，然后，在微波系统工作时拍摄。这样表面膨胀的部分就形成莫尔干涉条纹。以剪刀为被摄体，用这种方法制成的微波全息术的结果表示在图 10.8 上。

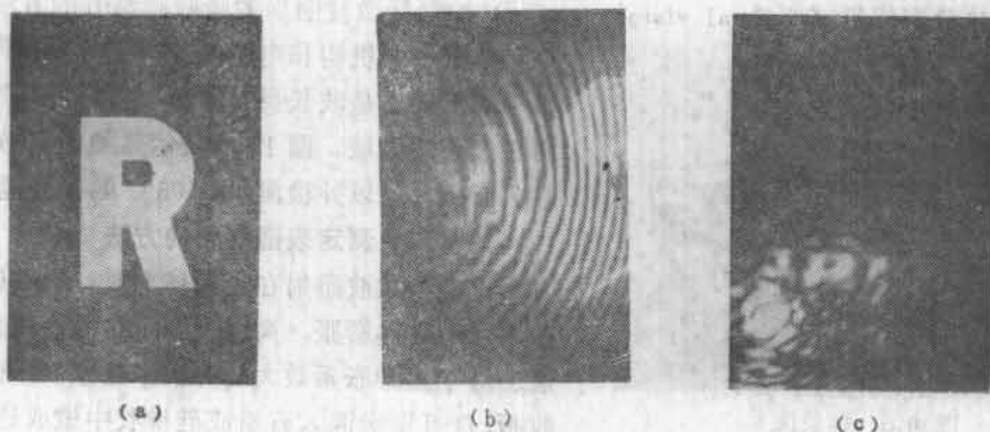


图 10.7

(a) 铝板做的目标( $17.5\lambda \times 12\lambda$ , 字的大小为  $4.6\lambda$ ) (b) 利用光干涉全息术制成的吸收体表面膨胀的微波全息图 (c) 微波全息图经缩小后用激光照射而产生的再现象

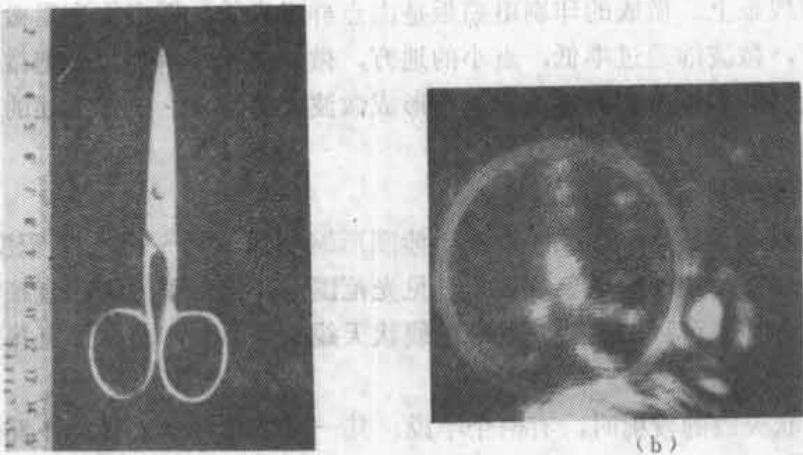


图10.8 莫尔微波全息图的再现象  
 (a)微波全息图的被摄体 (b)莫尔微波全息图的再现象

## 10.2 微波全息术的应用

### 10.2.1 微波全息术的透视

微波对光学上不透明的介质也能透过，所以，将微波全息术应用于透视方面，曾作了种种努力，规模大的尝试有从宇宙飞船上发射微波，扫描月球表面，将其反射波作全息处理，从而了解月球内部的构造。

此外，将它与X光透视比较一下，其最大的差异是，当X射线透视时，是看物体的阴影。所以，底片必须放在物体的后面，但是，在微波全息术的情况下，底片的位置几乎是任意的，因此，在用于非破坏性试验和探矿等方面时，这是非常有利的。

图 10.9 是用微波全息术来透视钱包，钱包中放一些硬币和三角形金属片，在这种情况下所摄得的结果。另外，这也是再现光不用光波而直接用微波进行的一个特殊例子。使用此法时，首先用上述的液晶膜把电波的强弱分布记录成颜色的图形，再把它通过具有适当特性曲线的底片，做成黑白照片。再把这黑白照片变成用于新闻照片印刷等方面的网格照片，然

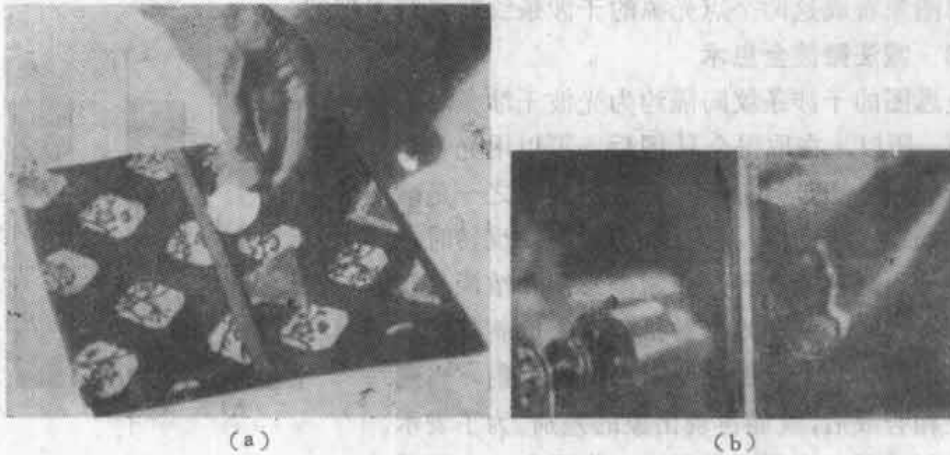


图 10.9  
 (a)放入钱包中的肯尼迪硬币及三角形金属片 (b)用微波全息术对钱包透视的结果



后，印在印刷电路布线板上。做成的印刷电路板是由点群组成的，把它作为用微波再现时的全息图。点大的地方，微波的透过率低，点小的地方，微波的透过率高。若把微波照射到这个印刷电路布线板上，就形成微波的再现现象。在形成微波象的地方，放置上述的液晶膜，就能看到微波的再现现象。

10.2.2 微波波段现象的直观化

再现微波全息图的象时，是把形成的微波干涉图形缩小到  $10^{-4} \sim 10^{-5}$  的程度后再用激光来观看象。这样就把微波波段的现象拿到了可见光范围内，相当于用眼睛直接看到了微波波段的现象。应用这种方法可以去制造发射中的线状天线的全息图，从而可直接观察到这个装置的发射分布情况。

原来，在研究线状天线的发射时，有两个学说。其一，是把整个天线看作发射体，另一个是把发射部分仅仅看成天线不连续部分的两端和中心的激励部分，也就是说，发射中的单极天线的全息图再现象是与正弦波的电流分布成正比的一串团子形的象呢？还仅是天线的两端发射，这是个疑问，图 10.10 是其结果。

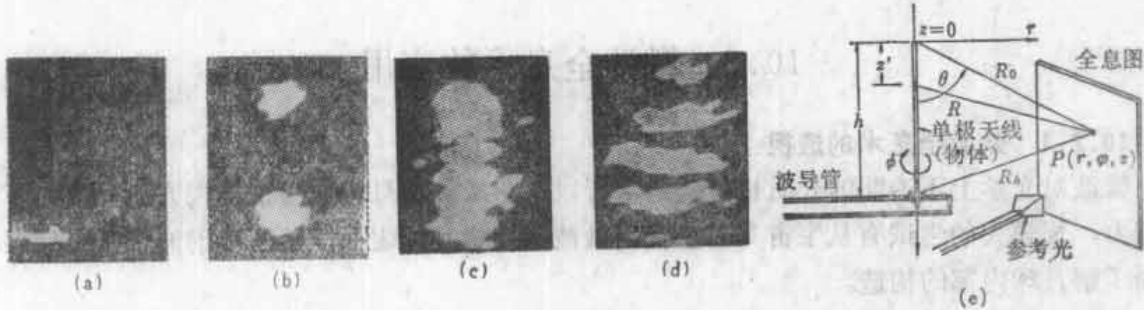


图10.10 微波的直观化

(a)被摄体是振荡中的单极天线 (b)再现象(天线所在平面) (c)再现象(近区)  
(d)再现象(远区) (e)制作全息图时的装置图

从这个图上看，这个疑问的答案是后面一种学说。若制成一个全息图，在使象再现时，通过调节透镜和屏幕间的相互位置，就可以知道所有地方的发射分布。这是这个方法的优点。此外，半波长天线是 8 字形的图象，比半波长长得多的天线是菊花形的图象。这些现象，只要把天线的图象看成这两个点光源的干涉条纹就很容易理解。

10.2.3 减法微波全息术

微波全息图的干涉条纹间隔约为光波干涉条纹间隔的  $10^6$  倍。所以，在取得全息图后，可以用光学全息图中不可能的办法进行加工，其应用实例之一是减法全息术。通过接触印制，使全息图的浓淡反转时，其再现象不变而其位相反转。正常全息图和浓淡反转的全息图如图 10.11 那样地交替排列，制成新的全息图，然后将这种微波全息图缩小并用激光照射，当两个再现象互相合成后，就能再现出象的差别。为了表示这个原理，制成了三个硬币的微波全息图和二个硬币的微波全息图。把二个硬币的全息图反转，进行减算

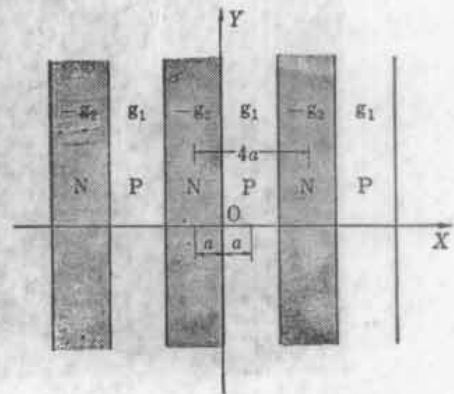
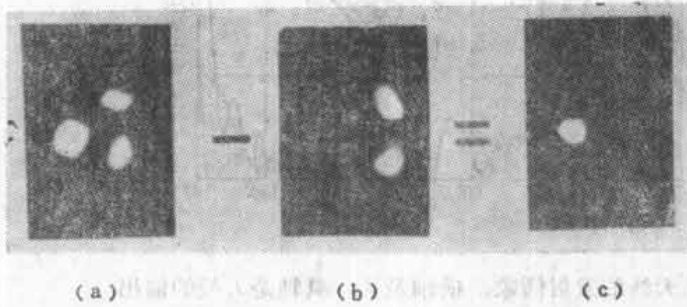


图10.11 正与负全息图交替排列得到减算全息图



其结果表示在图10.12上。应用此原理时，通过制造等离子放电管的微波全息图，可得到没有放电管玻璃壁影响的等离子放电象。从而能够提高微波等离子诊断的质量。此实验装置表示在图 10.13 上，其结果表示在图 10.14 上。



(a) 放入钱袋中的三个硬币的再现象 (b) 放入钱袋中的二个硬币的再现象 (c) 其差的象

图 10.12

(a) 放入钱袋中的三个硬币的再现象 (b) 放入钱袋中的二个硬币的再现象 (c) 其差的象

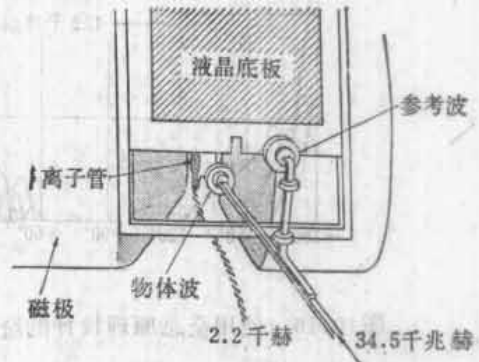
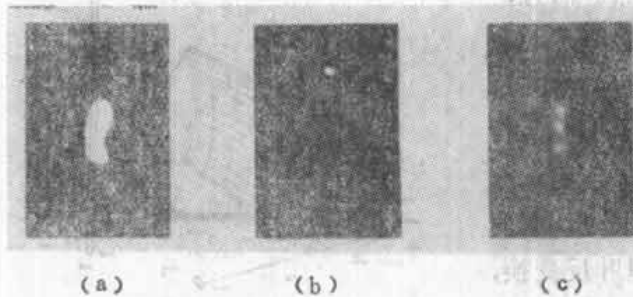


图10.13 用减算全息术可以直接看到封装在玻璃中的等离子管内的电子密度分布，而无玻璃管壁的影响

### 10.2.4 全息天线

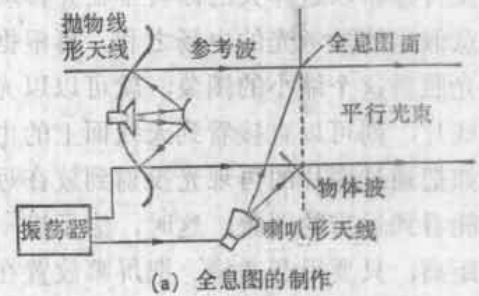
全息术的原理能够应用于微波天线的设计。它是应用了全息图所具有的如下性质，即，把参考波照射到形成的全息图上时，能再现物体波，相反，把物体波照射到全息图上时，就能再现参考波，也就是说，把这个二元性写成公式，就成为如下形式



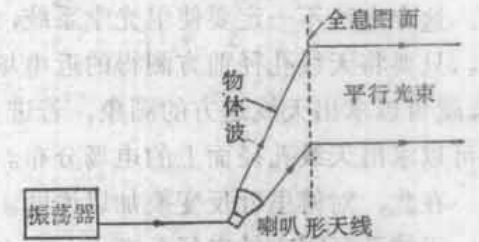
(a) 等离子管的玻璃管的再现象 (b) 停止放电的等离子管的象减去(a)图的象后所得的象 (c) 开始放电的等离子管的象减去(a)图的象后所得的象

图 10.14

(a) 等离子管的玻璃管的再现象 (b) 停止放电的等离子管的象减去(a)图的象后所得的象 (c) 开始放电的等离子管的象减去(a)图的象后所得的象



(a) 全息图的制作



(b) 平行光束的发射

图10.15 全息天线的设计

参考波 + 全息图 → 物体波

物体波 + 全息图 → 参考波

其设计顺序表示在图 10.15 上。首先，如图 (a) 所示，将抛物线天线出来的平行光束作为参考波，以喇叭天线出来的光束作为物体波，同时照射到全息图面上。这样就可测定全息图面上的电场强度分布。用铝箔上开很多格子状的孔，制成微波的透过系数与电场强度成正比的板，通过改变孔的大小使透过系数改变，这铝箔板就是微波全息图。

如果将物体波，即喇叭天线的光束照射在这微波全息图上，就能够得到参考波，即平行

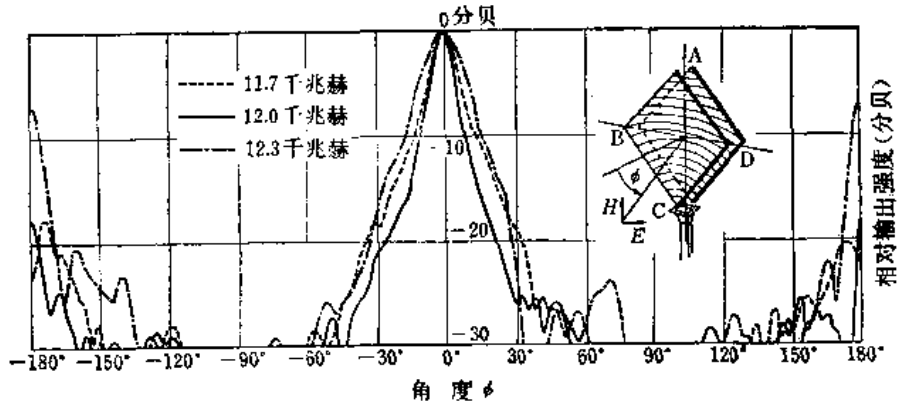


图10.16 使用全息原理设计的全息天线的发射图象，横轴是  $\phi$ ，纵轴是天线的输出

光束，图 10.16 就表示按这样设计而成的天线的图象。

10.2.5 从天线图象的近值求远值的方法

当测定天线远方范围内的方向性时，在天线的孔径面  $D^2$  非常大的情况下，可以看作是远方范围的距离，即下式变得非常大

$$R = \frac{D^2}{\lambda}$$

要使传感器以这样大的回转半径  $R$  移动是不可能的。因此，记录天线附近的电场后制成它和任意假定的参考光的电场之和，再根据此值描绘出浓淡的图象。将此图象拍成缩小象，并用激光照射这个缩小的图象，就可以以光学方法再现微波的象。如果向着再现光的光源方向看这底片，则可以直接看到天线面上的电场分布。而且，假如把通过底片的再现光投射到放在远处的屏幕上时，就能看到远方的图象。这时，为了进一步缩短到达屏幕的距离，只要用凸透镜，把屏幕放置在其焦点上就行了。这个方法不一定要使用光学系统，也可以使用计算机。只要将天线孔径前方测得的近电场进行傅里叶变换，就可以求出天线远方的图象。若进行傅里叶反变换，就可以求出天线孔径面上的电场分布。

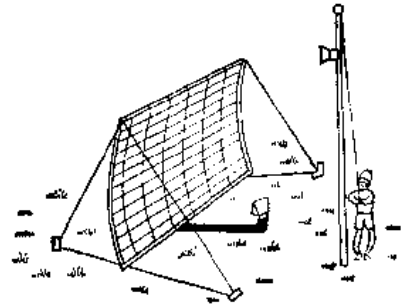


图10.17 大孔径天线的远方图象的决定

在此，对傅里叶反变换加以说明。

天线孔径面上的电场分布  $g(x, y)$  和离孔径前方距离为  $d$  的面上的电场分布  $g_n(x, y)$  的关系式，由式 (2.34) 得如下的关系式

$$g_n(x, y) = g(x, y) * f_d(x, y) \tag{10.1}$$

为了测定  $g_n(x, y)$  的值后计算  $g(x, y)$  之值，只要求出式 (10.1) 和  $f_{-d}(x, y)$  的合成就可以了。

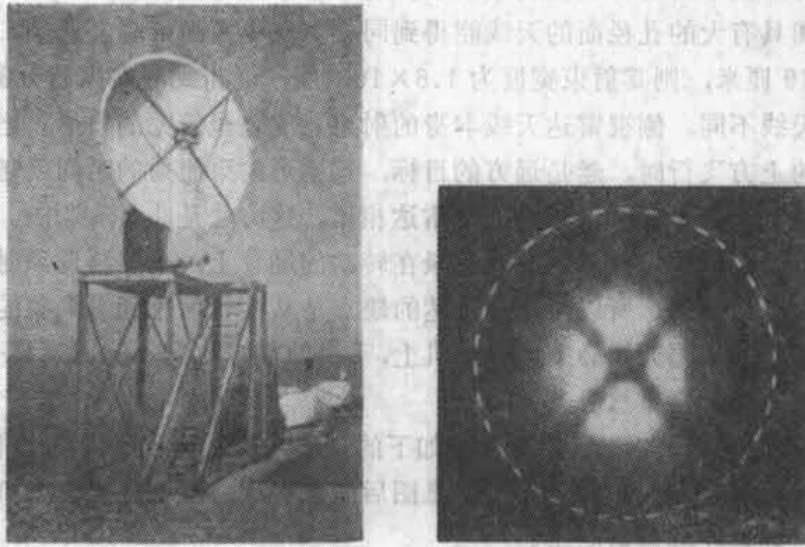
$$\begin{aligned} g_n(x, y) * f_{-d}(x, y) &= [g(x, y) * f_d(x, y)] * f_{-d}(x, y) \\ &= g(x, y) * [f_d(x, y) * f_{-d}(x, y)] = g(x, y) \end{aligned}$$

因此

$$g(x, y) = g_n(x, y) * f_{-d}(x, y) \tag{10.2}$$

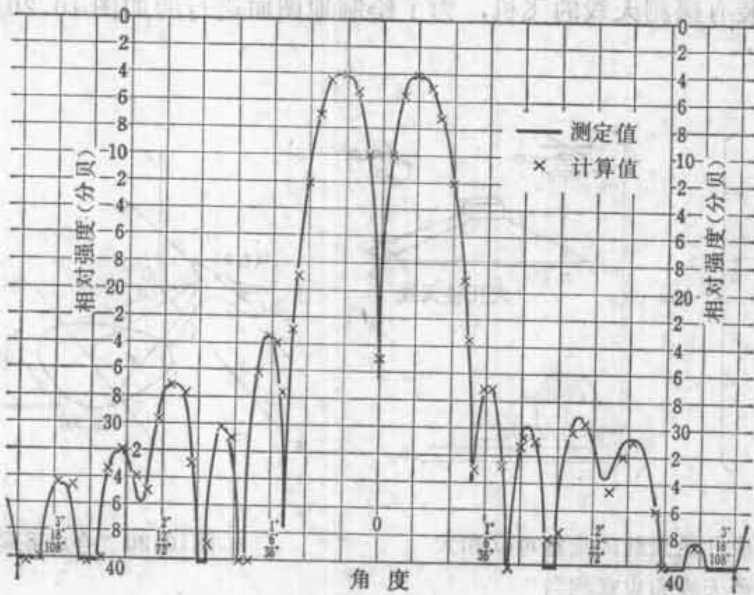
图 10.18(a) 表示用在此实验中的天线，图 10.18(b) 是用计算机对近区测定值作傅

里叶变换而求得的孔径面的电场分布，图 10.18(c) 是计算机对实测的近区图象作傅里叶变换而求得的远区图象与直接测定的远区图象的比较图，得到的结果非常一致。



(a)

(b)



(c)

图10.18 由近区图象去求孔径面与远区图象的方法

(a)抛物线天线 (b)定值计算的结果晒印在复印纸上而获得的图象

(c)根据实测的近区图象用计算机求得的远区图象

### 10.3 侧视合成孔径雷达

侧视合成孔径雷达 (side looking synthetic aperture radar) 是通过回波信息处理，能够将分辨率提得很高的雷达。

雷达的成象清晰度由天线的射束宽度决定。为了使射束的宽度变狭，一般来说，必须放

大天线的孔径面的尺寸。

孔径天线中，与进入孔径面的波有关的信息是一次性处理的。但是，若目标如地面那样，是不随时间变化的，就不需要一次性收集信息。用一个小的探测天线在孔径面上一边移动一边记录波面，则和具有大的孔径面的天线能得到同样多或更多的信息。例如，设记录距离为 1 公里，波长为 10 厘米，则其射束宽度为  $1.6 \times 10^{-2}$  度，能得到非常高的分辨率。

和别的雷达天线不同，侧视雷达天线本身的射束宽度是呈较宽的扇形。当装有探测天线的飞机在被摄体的上方飞行时，越是远方的目标，这扇形射束照射的时间就越长。因此，即使目标较远，其清晰度也不会降低。与普通雷达相比，这方法是非常有利的。

这种雷达的记录，首先以颜色的深浅记录在转动的底片上，当要再现象时，把这底片放入光学系统中，才能形成象。所以，这种雷达的缺点是从接收信号到得到象的过程很麻烦，而且很费时间。另外，探测天线必须放在飞机上，飞机的前进方向不能偏离某一直线。所以，需要各种稳定机构，其价格自然提高了。

在历史上，Roger 在 1957 年已经进行了如下的试验，就是接收从头顶上移动过去的从电离层和飞机上散射的波，在底片上记录全息图后使象再现。至于放置在飞机上的雷达，即侧视雷达的问世，则是在其以后的事。

### 10.3.1 合成孔径雷达的原理

这里分析一下装有探测天线的飞机，为了绘制地图而进行的如图 10.20 那样的飞行情况。

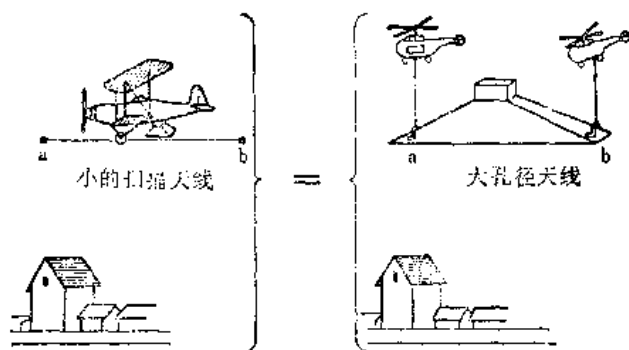


图10.19 合成孔径天线的束宽可以和大孔径天线的束宽相当

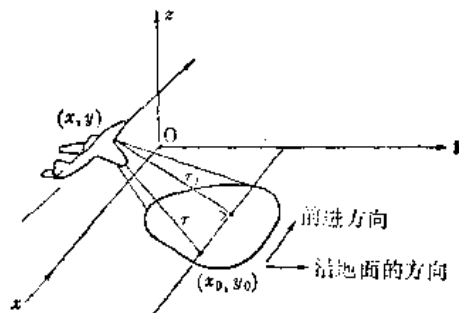


图10.20 合成孔径雷达

为了绘制正确的地图，在飞机前进方向 (azimuth) 和与之垂直并沿地面的方向 (ground range) 这两个方向上，都必须具有清晰度。与前进方向垂直的方向上的清晰度，能以脉冲方法简单地获得，前进方向的清晰度只有缩小天线的射束才能得到。

对侧视雷达，垂直前进方向的清晰度，能以脉冲方法得到，前进方向的清晰度，以合成孔径天线 (synthetic aperture antenna) 的方法得到。

现在，为了简单起见，假定目标只有一个，它位于图 10.20 的坐标系的  $(x_0, y_0)$  处，设从飞机到目标的直线距离为  $r$ ，从飞机发射的波用下式表示

$$S(t) = ae^{-i\omega t} \quad (10.3)$$

则从目标散射返回的电波  $R(t)$  是

$$R(t) = a' S\left(t - \frac{2r}{c}\right)$$

$a'$  是复数，散射体的电特性和传播损失等都全部包含在  $a'$  中。将这反射波放大后和发射波混合。

设飞机在时刻  $t$  时，位于  $(x, y)$  的位置上，则合成输出  $I(x)$  为

$$I(x) = \frac{1}{2} [S(t) + R(t)][S(t) + R(t)]^* = |a|^2 \left( 1 + \frac{1}{2} e^{j2kr} + \frac{1}{2} e^{-j2kr} \right) \quad (10.4)$$

式中  $k = \omega/c$

在上式中，为了使数学式简单化，假设使用的  $a'$  值等于  $a$  值的放大率的放大器。 $r$  的值，参考图 10.20，近似地表示成下式，

$$r = \sqrt{r_0^2 + (x - x_0)^2} \approx r_0 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{r_0} \quad (10.5)$$

将式 (10.5) 代入式 (10.4) 中，则

$$I(x) = |a|^2 \left( 1 + \frac{1}{2} e^{j \left[ k \frac{(x - x_0)^2}{r_0} + \phi \right]} + \frac{1}{2} e^{-j \left[ k \frac{(x - x_0)^2}{r_0} + \phi \right]} \right) \quad (10.6)$$

或

$$I(x) = |a|^2 \left[ 1 + \cos \left( k \frac{(x - x_0)^2}{r_0} + \phi \right) \right] \quad (10.7)$$

式中  $\phi = 2kr_0$

根据式 (3.53) 可以看出，式 (10.7) 是焦距为  $r_0/2$ ，中心在  $x = x_0$  处的一维带板的表示式。因此，在底片上，透过率分布描成与式 (10.7) 之值成正比的一条浓淡的线（一维菲涅尔带板），当平行光照在其上时，光就集中到一点，成为点物体的再现象。

下面，在目标不仅仅是一个，而是有无数个的情况下，从反射回来的电波中，首先选择离开飞机航线的距离为  $r_0$ ，与航线平行的直线上的物体所发出的波。

图 10.21 是表示这种选择方法的原理图。从振荡器发出的微波的脉冲，能够从天线发射，来到回波通过回转器进入检波放大器，用其输出调制阴极射线管的辉度。光栅只位于一根扫描线上扫描，光栅的象成在和扫描线垂直移动的底片上，微波脉冲的发射和阴极射线管的扫描同时开始，光栅在 S 到 Q 的直线上前进。发射波从目标返回的时刻，光栅的辉度提高，例如，设光栅在 R 点变明亮，则阴极射线管面上的  $\overline{SR}$  的长度就表示电波到达目标并返回时这个过程所需要的时间，越是远的目标其返回的波， $\overline{SR}$  的长度越长。此外，目标的反射系数越大则 R 点的辉度越高。因此，离开飞机相等距离处的物体的散射波，记录在这张底片的水平线上。

由此目标形成的图象，如图 10.22 中的 R<sub>0</sub> 线所示。当如图 10.22 所示的那样，将短的

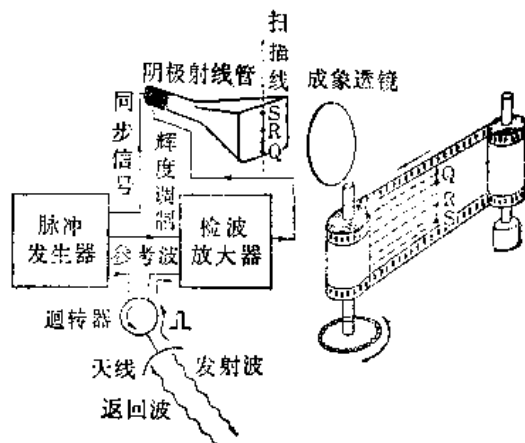


图 10.21 侧视雷达的记录装置

柱面形平凸透镜放置在该底片的表面上，将平行光从背面上平排地入射，则光线通过焦距为  $f$  的柱面平凸透镜时，得到了如下的位相变化。

$$e^{-jk\frac{x^2}{2f}}$$

所以，光通过底片和平凸透镜时，透过光为

$$I(x) \cdot e^{-jk\frac{x^2}{2f}} = |a|^2 \left[ e^{-jk\frac{x^2}{2f}} - \frac{1}{2} e^{jk\frac{x_0^2}{r_0} + j\phi} e^{jk\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2f}\right)x^2} e^{-jk2\frac{x_0}{r_0}x} + \frac{1}{2} e^{-jk\frac{x_0^2}{r_0} - j\phi} e^{-jk\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2f}\right)x^2} e^{jk2\frac{x_0}{r_0}x} \right] \quad (10.8)$$

上式中 为了使数学式简化，设定了底片的移动速度等于飞机的航行速度。底片的透过率分布为  $I(x)$ ，若选择此平凸透镜的焦距  $f$  为  $r_0/2$ ，则上式第二项成为

$$\frac{1}{2} e^{jk\frac{x_0^2}{r_0} + j\phi} \cdot e^{-jkx\sin\theta_0}$$

式中

$$\sin\theta_0 = \frac{2x_0}{r_0}$$

成为进行方向为  $\theta_0$  的光线，这光线的波面平行  $x$  轴，在  $y$  轴方向上成为圆柱面发散波。同理，当考虑图 10.22 中的  $R_1$  线时，若平凸透镜的焦距  $f$  选择为  $r_1/2$ ，则可以得到向  $\theta$  方向行进的光线。若如图 10.23 所示的那样，将越向下焦距越短的梯形透镜  $L_1$  放置在底片前表面上时，底片内无论那一部分，其波面都成为平行  $x$  轴的光线。

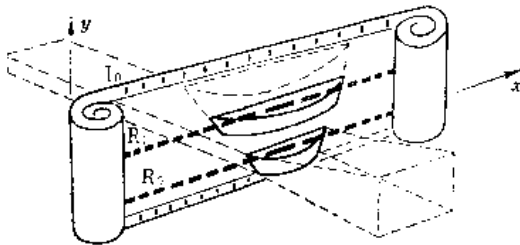


图10.22 合成天线的成象原理

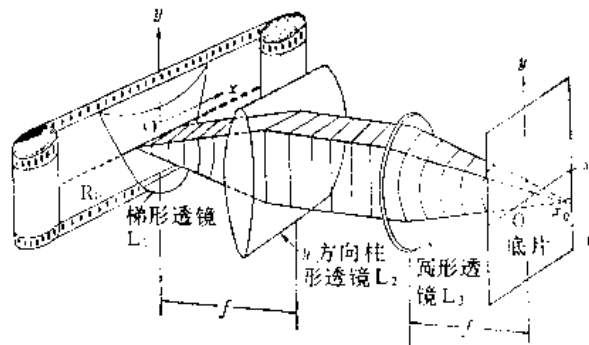


图10.23 用光学系统从合成孔径雷达的记录底片上求象的方法

下面，为了叙述由底片再现出象的最后阶段的过程，再对图 10.23 继续加以说明。从梯形透镜出射的光，如上所述是平行  $x$  轴方向的，而在  $y$  轴方向上是圆柱面发散波，这可以想象成有年轮的木头，切成以其中中心为顶点的楔形，将其顶点放在  $x$  轴上时的情况，年轮相当于等位相面。

$y$  轴方向的柱面透镜  $L_2$  放置在这样的位置上，即将  $R_0$  包含在其前焦面中，从柱面透镜  $L_2$  发出的光的波面，既平行于  $x$  轴方向，也平行于  $y$  轴方向，所以，当使用柱面透镜  $L_3$  时，在其焦面上能得到一点的象，即使目标有无数个，也同样能在分别的点上成象而形成整个的象。图 10.24 表示侧视合成孔径雷达拍摄的象的照片。



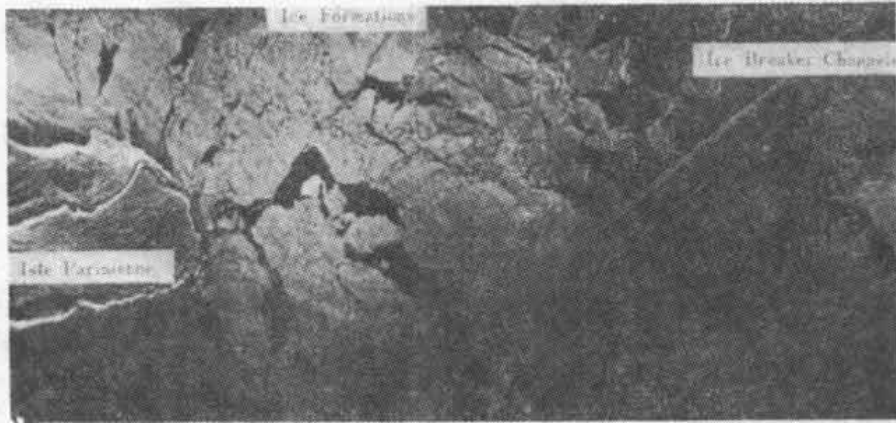


图10.24 用侧视合成孔径雷达摄取的冰河象(ERIM)

### 10.4 HISS 雷达 (全息测冰系统)

HISS 雷达 (Holographic Ice Surveying System) 是通过搞清反射波的波面的曲率半径来测量距离的雷达。

以石子投入水池为例来加以说明, 当向水面投石子时, 就形成图 10.25 所示的球面波。当在岸上观察它时, 石子落下点靠近岸边时, 反射的球面波的曲率半径小。相反, 当石子落下点较远时, 反射波成为平面波的形式, 其曲率半径接近无限大。因此, 只要测定反射波的曲率半径, 就能知道距离。

HISS 雷达就是根据上述原理设计成的雷达。图10.26是表示这种雷达的组成图。它和由传播时间求距离的脉冲雷达或调制雷达的原理不同, 这是用于近距离的测量冰层厚度的雷达。

图 10.27 中, 天线发射的细的射束, 从冰的表面、底面和内部的不连续的点上散射。接收散射波的天线阵列其轴上的分布为



图10.25 HISS雷达的原理说明

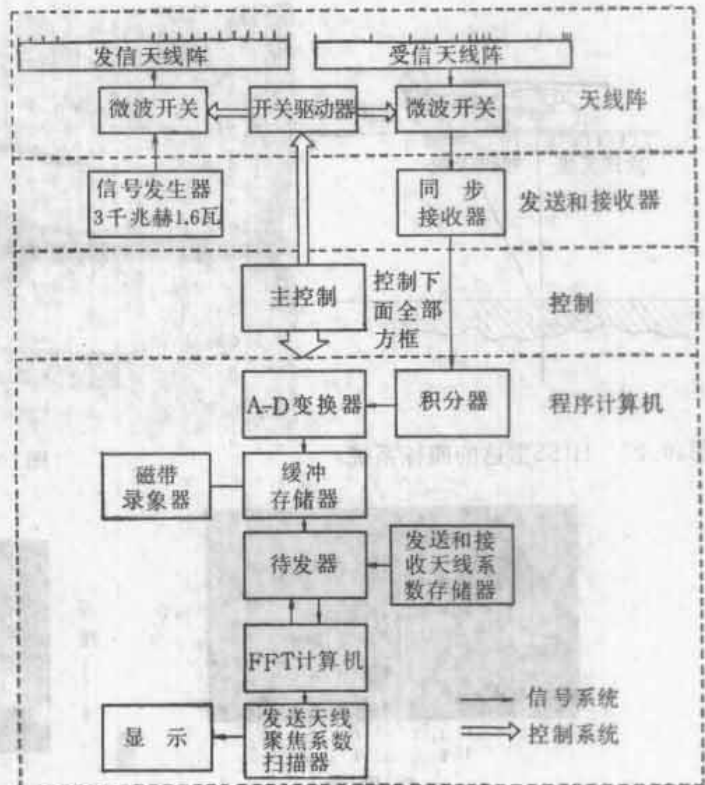


图10.26 HISS雷达的组成

$$H(x) = K \int_{y_0}^{\infty} \frac{S_0(y)}{y^2} e^{jk \frac{x^2}{2y}} dy \quad (10.9)$$

式中  $S_0(y)$  是位于  $(0, y)$  点上的目标的反射系数。还利用了式 (10.5) 的近似式,  $1/y^2$  是因为考虑了往返的电波的发散。

再把式 (10.9) 作如下的变数变换

$$X = x^2 \quad (10.10)$$

$$Y = \frac{1}{2y\lambda} \quad (10.11)$$

就得到

$$H(X) \propto \int_{Y_0}^{\infty} S_1(Y) e^{i2\pi XY} dY \quad (10.12)$$

$H(X)$  成为  $S_1(Y)$  的傅里叶反变换值。可以看出, 目标的分布函数  $S_1(Y)$ , 可通过测定  $H(X)$ , 再将其值作傅里叶变换而求得。

图 10.27 中, 天线元件不是等间隔的, 这是由于将天线元件作二次函数地布置, 使式 (10.10) 的变换自动进行之原故。

还有一个特点是, 采用不使全部列阵元件一次激励, 使列阵元件一个一个顺次地激励, 制成全息矩阵。由这全息矩阵, 采用 FFT 的方法求距离。图 10.28 是 HISS 的外形图, 图 10.29 是使用这种雷达测定冰层厚度的结果, 得到了噪声很少的象。

这种雷达的特点, 由于采用载波, 所以不象脉冲雷达和调制雷达等, 存在脉冲形状和调

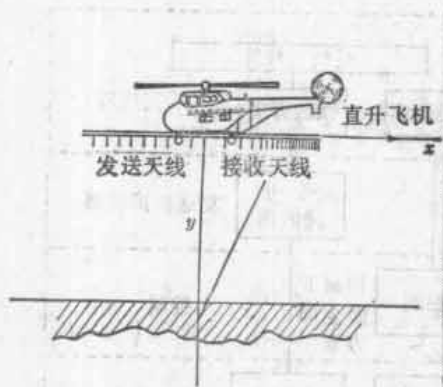


图10.27 HISS雷达的座标系统



图10.28 HISS雷达的照片

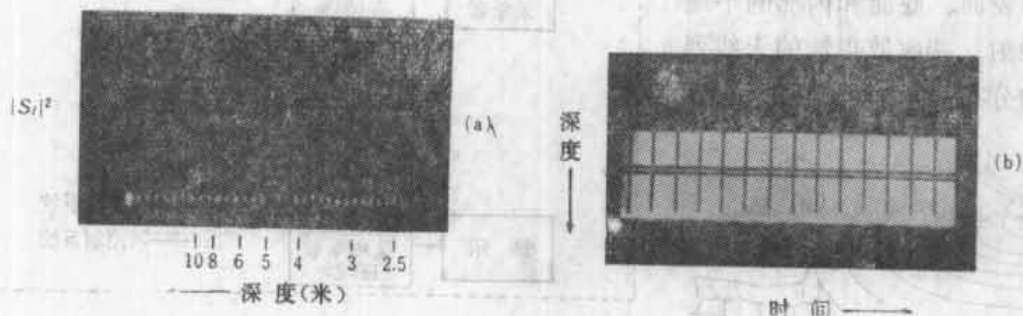


图10.29 HISS雷达对冰层厚度的测定结果

(a) 从冰的表面与底面的反射 (b) 将上述讯号进行幅度调制时冰的断面照片



制的直线性等麻烦。其性能主要决定于FFT计算机的信息处理能力，其他部分的机构，比普通的雷达简单。

## 文 献

- (1) 飯塚, “マイクロ波ホログラフィ1”, 電子通信学会誌, 58-6, pp. 640~646, 昭50-6.
- (2) 飯塚, “マイクロ波ホログラフィ2”, 電子通信学会誌, 58-7, pp. 772~780, 昭50-7.
- (3) Y. Aoki, “Microwave holograms and optical reconstruction”, *Appl. Opt.* Vol. 6, pp. 1943~1946, 1967.
- (4) 繁沢, 滝山, 豊永, 西村, “球面走査による電波ホログラフィ”, 信学論(B), 56-B, 3, pp. 99~106, 昭48-3.
- (5) C. F. Augustine, “Field detector works real time,” *Electronics*, June 24, Vol. 41, pp. 118~122, 1968.
- (6) L. G. Gregoris and K. Iizuka, “Additive and subtractive microwave holography,” *Appl. Opt.* Vol. 12, p. 2641~2648, 1973.
- (7) K. Iizuka, H. Ogura, J. L. Yen, Van Khai Nguyen, and J. Weedmark, “A Hologram Matrix Radar,” *Proc. IEEE*, 64, pp. 1493~1504, 1976.
- (8) K. Iizuka, M. Mizusawa, S. Urasaki, and H. Ushigome, “Volume type holographic antenna,” *IEEE Trans. AP* 23, Nov, 1975.
- (9) E. B. Joy, C. P. Burns, and G. P. Rodrigue, “Accuracy of far field patterns based on near field measurements,” *IEEE G-AP Symp.* p. 57, Aug. 1973.
- (10) J. C. Bennett, A. P. Anderson, P. A. McInnes and A. J. T. Whitaker, “Investigation of the characteristics of a large reflector antenna using microwave holography,” *IEEE G-AP Symposium*, pp. 298~301, 1973.
- (11) E. N. Leith, “Quasi-holographic techniques in the microwave region,” *Proc. IEEE*, 59, p. 1305~1318, 1971.
- (12) 岩崎, 青木, 鈴木, “走査形ホログラフィにおけるLeith形ホログラムと複素ホログラムの計算機再生について”, 信学論(B), 57-B, 4, pp. 214~220, 昭49-4.
- (13) W. M. Brown and L. J. Porcello, “An introduction to synthetic aperture radar,” *IEEE Spectrum*, Sept. pp. 52~62, 1969.
- (14) T. Hasegawa, “A new method of observing electromagnetic fields at high frequencies by use of test paper,” *Bulletin of Yamagata University, Yamagata, Japan*, IV p. 1, 1955.

# 第十一章 全息术的实验例

读书只能理解原理，一到实验阶段，往往会不知如何做好，在本章中是以照片来说明一些实验的方法。

## 11.1 全息术用的光学实验台 (optical bench)

为了制作全息图，必须采用特别的实验台。由于拍摄的是光波长级的干涉条纹，所以在曝光过程中，必须极力避免实验台的振动。外部的振动源具有很宽的频率范围，实验上成问题的是其中以实验台的固有振动频率振动的振幅峰值。因此，希望将实验台的固有频率降低到底板曝光时间的倒数值以下，以便使摄影中不包含上述峰值。

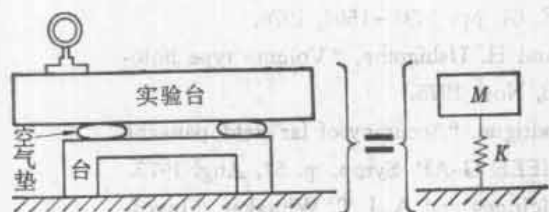


图11.1 光学实验台与其等效图

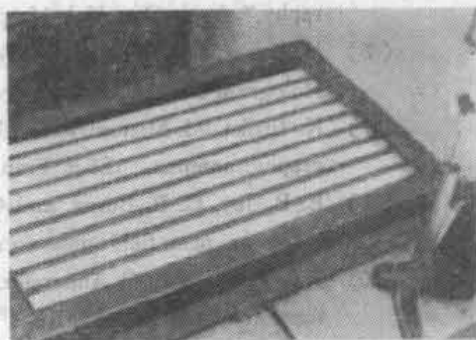


图11.2 空气进入不锈钢台面下装有空气垫的光学实验台

如果图 11.1 中表示的光学实验台 (optical bench)，其质量为  $M$ ，空气垫的柔量 (compliance) 为  $K$ ，则实验台和空气垫组合成的系统的固有频率  $f_0$  可用下式表示

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{MK}} \quad (11.1)$$

为了缩小  $f_0$ ，必须增大  $M$  和  $K$  的积，也就是说，重而惯性大的台，由于通过软的空气垫，即使下面向上碰，台也不会动，所以，从下面来的振动不能传到台上。

图 11.2 是四角上装有空气垫的不锈钢制的光学实验台，正在用自行车打气筒打入空气。

另外，还有如图 11.3 所示的各种各样办法。(a) 是将普通桌子的腿加强，放在车轮的内胎上，在激光器输出

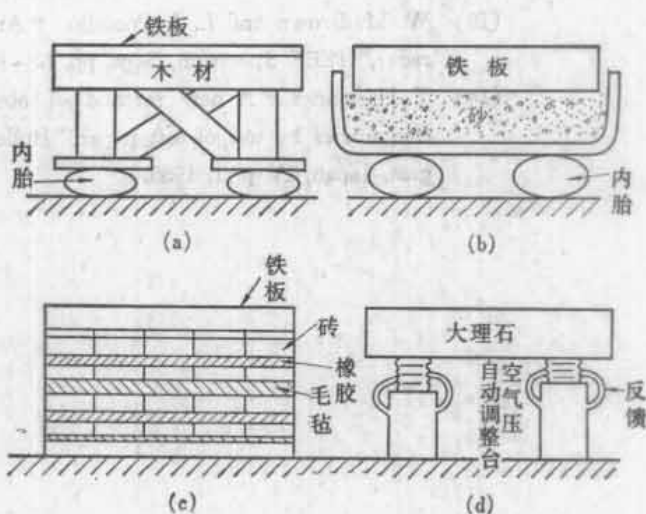


图11.3 各种光学实验台

大而曝光时间短的情况下，采用这个方法也很实用。(b)是很重的台，但能够很容易地从室内搬出搬进的方法。只要把砂倒出，就能简单地搬移地方，而且，还可以适当增减重量。(c)是用铁板、砖、毛毡板或橡胶板做成的，这种结构也容易搬移位置。(d)是将特殊的能自动调整空气压的腿安装在铁板或大理石上的结构。台的上表面必须做成平面，否则，放在台面上的光学元件会摇摇晃晃，或者是，一动台面上的光学元件，其高度就发生变化，使调整发生困难。

## 11.2 全息术所必要的设备

这要根据目的和可能性而定，但是，如下一些东西是必不可少的

- (1) 光学实验台 (optical bench);
- (2) 激光器 (laser);
- (3) 光束导向器 (beam director);
- (4) 空间滤波器 (spatial filter);
- (5) 析光镜 (beam splitter);
- (6) 底片夹 (plate holder);
- (7) 表面反光镜 (surface mirror) 三块;
- (8) 可调衰减器 (variable attenuator);
- (9) 光度计 (light meter);
- (10) 透镜 (lens) 二块;
- (11) 透镜夹 (lens holder)。

下面逐个加以说明。

### 11.2.1 光学实验台

如上所述，要选择固有频率低的，而且，最好把台放置在地下室。但是，应该放在远离电车和汽车等通过的地方。此外，水泵的振动和通风孔的风速等也必须加以注意。希望做成容易做实验的高度，并放在房间的正中央。

### 11.2.2 激光器

当利用输出为几毫瓦的激光器时，会增加曝光时间，是不方便的。此外，激光管的包封层，为了散热，要用开孔的物体做成孔不互相重叠的传导放热方式，保证不漏光才较合适。

### 11.2.3 光束导向器

激光光束的出射高度，一般比别的元件低，所以往往要用光束导向器提高其高度。光束导向器如图 11.4 所示，是由二块反光镜组成的，其构造象潜望镜，上部和下部的反光镜能够回绕着支柱转动，能够自由地改变光的方向。

### 11.2.4 空间滤波器

这是由显微镜物镜和针孔组成。用于消除由激光中的散射和反射引起的波面紊乱的杂光。

图 11.5 表示滤波器的构造，从显微镜物镜射出的光，聚焦在针孔上，若选择针孔的孔的大小等于透镜衍射光的主瓣的宽

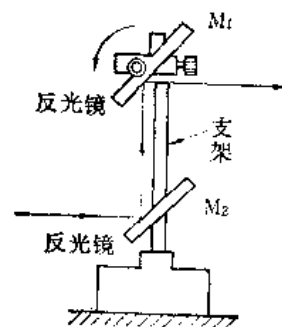


图11.4 光束导向器

度,就只能通过平行光轴入射的光,而消除了不平行光轴的光。使用  $N$  倍的显微镜物镜时,选择针孔的直径为  $D_p$ ,

$$D_p = 300 \frac{\lambda}{N} \text{ 微米} \quad (11.2)$$

式中  $\lambda$  是波长,单位是微米。例如,当氦氖激光 ( $\lambda = 0.6328$  微米) 和 10 倍透镜组合时,可以选择直径为 20 微米的针孔。

### 11.2.5 析光镜

这是用于将光束分成二路透明玻璃片,用于将光束分成参考光和物体光。若是和可调衰减器组合在一起工作可能简单地使参考光和物体光的光强度之比得到调节。

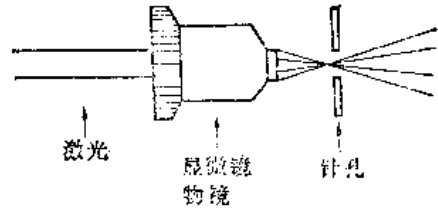


图11.5 空间滤波器

### 11.2.6 底片夹

由于往往是在全暗的环境中操作。所以,最好做成简单的而且能够使底片完全吻合地固定下来的结构。此外,在作实验时干涉全息图时,必须有能使干板在显影之后正确地回到原来位置上的机构。另外,当希望减少显影前和显影后干板的变形,可将底片夹安装在透明的水槽中,就那样进行拍摄。

### 11.2.7 光度计

在光度计中有激光专用的光度计,但不一定需要,如果有普通摄影用的光度计,通过实验,作出其校正曲线,就足够能满足要求。

## 11.3 制作全息图的步骤

首先,在纸上画出元件布置图,并加以细致研究,考虑下面一些问题:

- (1) 物体波与参考波二路光的光路长度是否相等?
- (2) 物体波与参考波的角度是否做得过大或过小,适当的角度是  $30^\circ \sim 90^\circ$ 。
- (3) 照相底板应尽量放在光学实验台的边部,这样在暗室中操作上方便。
- (4) 致于全息图的视场,可以把底板看成出窗,只拍摄观察到的部分,所以需要检查物体的构图是否与要求相符。
- (5) 激光器不一定要放在光学实验台上,只要放在稳定的桌子上就可以了。

现在,从这样的认识来考虑,设采用图 11.6 所示的布置,工作应怎样进行下去呢?

首先是确保光学实验台成水平放置,然后如图 11.7 那样,从大的元件开始依次地放好。图 11.8 是布置过程中拍摄的照片。因底板有厚度,干涉条纹的断面成百叶窗的样子,在这种情况下,为了使干涉全息图在显影时不产生条纹的变形,可使参考光对底片的入射角  $\theta_r$  和物体光对底片的入射角  $\theta_o$  做得相等。相当于立体干涉条纹的百叶窗的一块一块叶片面刚好与底片的表面成直角。

使  $\theta_r$  与  $\theta_o$  达到相等的操作过程表示在图 11.9 上,将一块玻璃板暂时装入底片夹中,使参考光反射,转动底片夹,使其反射光和物体光在纸面上相遇,这时就达到了  $\theta_r$  等于  $\theta_o$  的目的。图 11.10 是进行这一操作的情况,在纸上可以看到两点。图 11.11 是将物体放在纸面

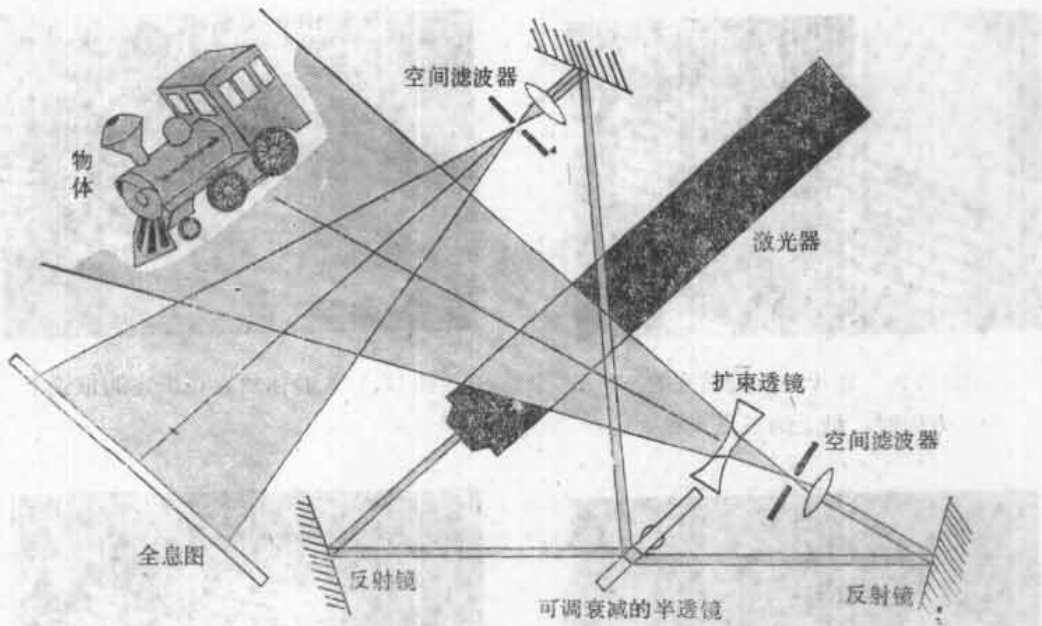


图11.6 制成全息图时各元件的配置

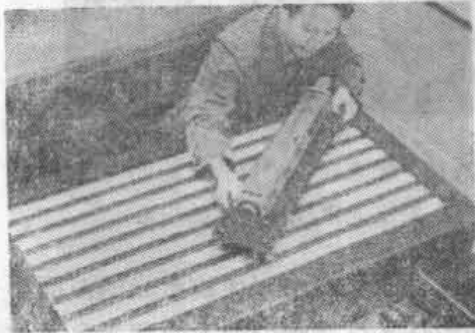


图11.7 从大件开始顺序安装，首先是装置激光器

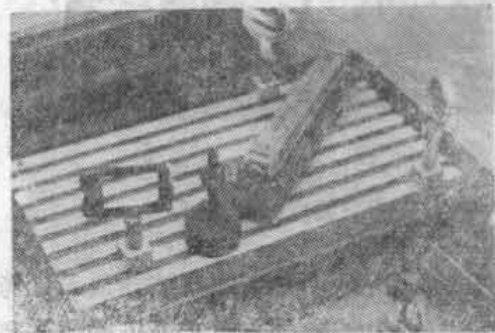


图11.8 图中的装置，从左到右为底片夹，折光镜，激光器，反射镜

位置时的情况。

其次，为了使发射物体光的激光器到底板的长度和发射参考光的激光器到底板的长度，尽可能做得相等，用卷尺如图 11.12 那样测量。为什么要这样做呢？这是因为要使激光器发出的两束波，同时到达底板并产生干涉条纹。而且这样做可以放宽激光器的时间稳定性的控制要求。若参考光和物体光中的某一条光路长些，则在底板上产生干涉的波不是从激光器上同时发出的波。通过较长的光路的光是与比它迟一些从激光器发出的通过较短光路的光相干涉。所用激光器的位相稳定度也有关系，其差值希望是几个厘米，最长不超过几十厘米。

其次，必须把放在各个位置上的激光的高度加以凑齐，由于所有的光学元件都在光学实验台上，其光轴应是成水平的，所以，若光束不水平，就使以后的调整很麻烦。

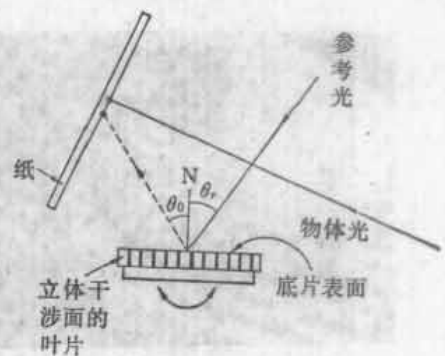


图11.9 减小显影变形的底片夹放置方法



图11.10 底片夹放到适宜的方向时，纸上的二点一致



图11.11 物体放置在决定的位置上



图11.12 参考光与物体光的全长应大致相等



图11.13 光束在各个位置上的高度应相等，要使光束打在物体的中心

如图 11.14 所示，将空间滤波器放入参考光和物体光的光路中以便使激光的波面凑齐，同时激光束将产生扩展，若激光束扩展超过要求，则会从光学实验台的表面和光学元件的支架等上面产生乱反射，形成危害性的散射光。所以，要调节空间滤波器的位置，使光束扩展达到适当的大小。

由于必须把参考光的波面凑齐，所以，必须把参考光用的空间滤波器放在光路的最后处，以免把好不容易凑齐的波面再搞乱。空间滤波器和底板之间不要放入反射镜等元件，但是由于物体光射到物体上以后就被散射，所以，差一点也不成问题。



图11.14 放入空间滤波器使光束的波面凑齐并同时扩展



图11.15 参考光与物体光的  
光强之比的测定



在被摄体照明的对比度过强的情况下，也可以将毛玻璃放在物体前面，用毛玻璃上的散射光照射物体，使用毛玻璃时，物体光的空间滤波器就不一定需要了。

参考光和物体光的光强度之比，可交替地把物体光和参考光遮断，将光度计分别朝着其前进方向而进行测定。在测定值上乘以入射角的余弦，以便对入射角的倾斜作校正。图 11.15 是进行这种测定操作的情况，参考光和物体光的干涉条纹的驻波之比（条纹光强度的峰值和谷值之比），在参考光和物体光的振幅相等时为最大，而且是无限大。

在干涉条纹光强度的最低点上，其光强度为零。但是，表示底片曝光量和透过率关系的特性曲线，在曝光量为零的附近，出现很严重的非线性，所以不能够使用。因此，为了避免这一缺点，一般是将参考光的光强度取为物体光的平均光强度的 4~8 倍，以降低驻波之比。

其次，必须极力防止漏光，如图 11.16 所示，在反射镜不使用部分要贴上黑纸，或者竖立黑色屏幕，以遮断漏出的光。如果激光器通风孔漏光，应在漏光孔上盖上覆盖物。安装快门时，如图 11.17 所示，不要直接装在光学实验台上，以免快门的振动直接传到光学实验台上。还有，关闭快门时，激光会从快门金属膜片上反射，必须注意，不要使此反射光漏到不应有光去的地方。

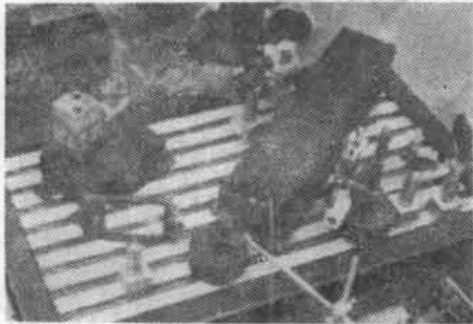


图 11.16 反射镜的不使用部分用黑纸贴起来，从激光器的通风孔出来的光也必须挡住

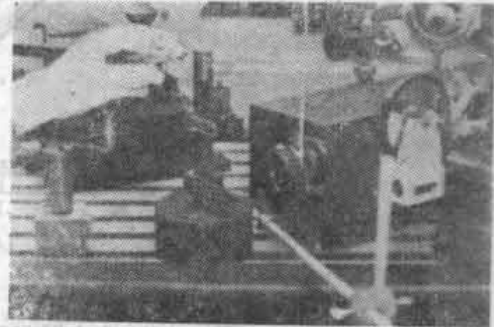


图 11.17 安装时不要使快门与光学台直接接触

## 11.4 曝光

根据底片的不同类型，可使用的安全灯泡的种类也不同。但是，在使用 Kodak 公司的 469 F 底片和 Agfa 公司的 8 E 75 底片时，其感光波长的范围很宽。所以，不能使用安全灯泡。

将底板装入底片盒时，涂感光乳剂的面必须朝向激光的方向，为了区分那一面是涂感光乳剂的面，可在指尖上少许沾上一点唾液去碰底片表面，感到粘度高的面，就是涂有感光乳剂的面。

使用软片时，右手摸着软片下端的切痕时，感光乳剂面是朝向实验者的（见图 11.18）。

安装底板或软片后，为了避免光学实验台振动，要暂时停一回儿，然后再曝光，曝光时间的标准值表示在图 11.19 上。

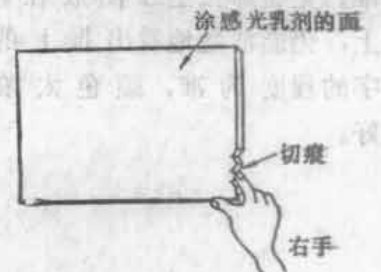


图 11.18 分清底片表面的方法

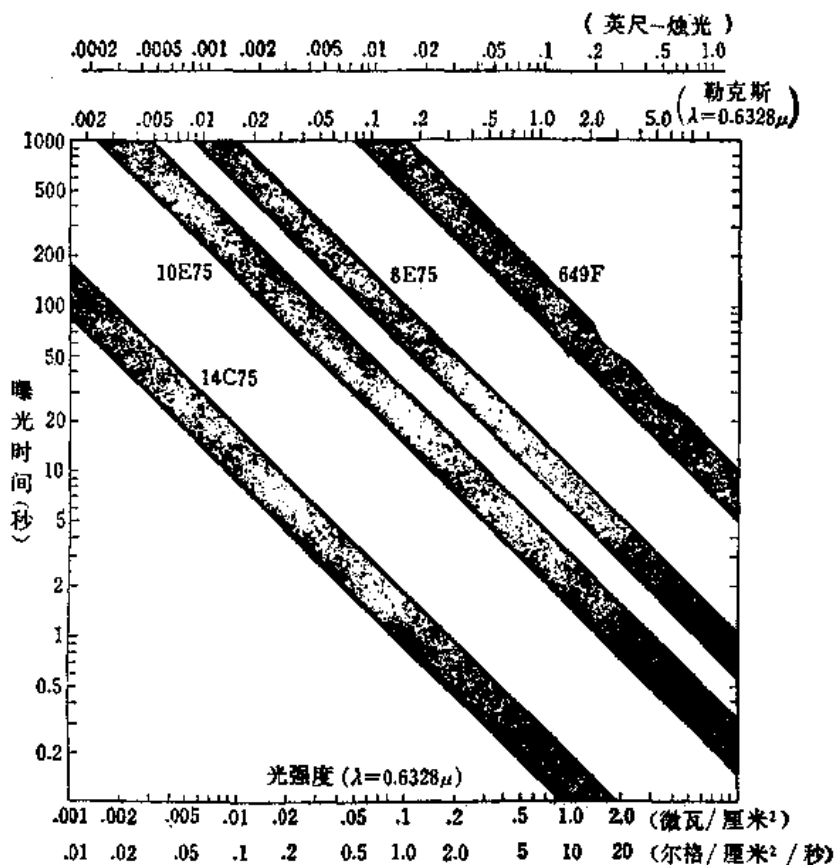


图11.19 全息图所用底片的最佳曝光时间

试验曝光时间时，如图 11.20 所示，用纸将一张底片的一部分遮住，阶段性地进行曝光，每曝光一次，把纸移动一个区间。于是，一张软片上能够试验很多曝光时间。必须注意，做试验时，纸及拿纸的手都不能碰到光学实验台。

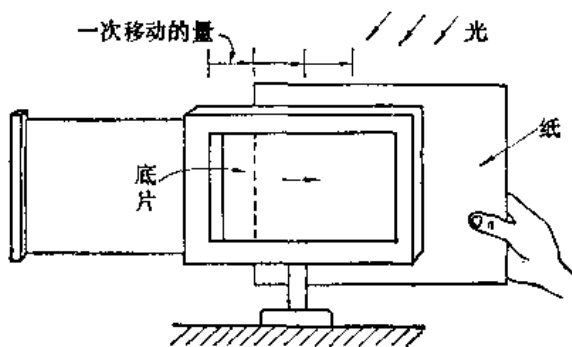


图11.20 每打开试印底片的一部分，就进行一次曝光

显影后，全息图的浓度标准，是将那张全息图放在报纸上，仍能清楚地看出报上的小字的程度为准，颜色太浓不好。

### 11.5 暗室处理

全息术所用底片的显影，可用微粒底片的显影规范来进行显影。这时显影可按以下步骤进行。



(1) 放在显影液 Kodak D-165中	3~5 分钟
(2) 放在停显液中	30 秒~1 分钟
(3) 放在定影液中	4~7 分钟
(4) 放在海波消除液中 (海波消除液即五水硫代硫酸钠)	2 分钟
(5) 水洗	30 分~1 小时
(6) (驱水液)	30 秒~1 分钟
(7) 干燥	30分钟

### 11.5.1 显影

底片的感光乳剂是由卤化银 (silver halides), 即氯化银  $\text{AgCl}$ , 溴化银  $\text{BrCl}$ , 碘化银  $\text{AgI}$  为主合成的。

将这些感光剂溶入明胶而成的液体, 就称为感光乳剂 (emulsion), 底片就是将感光乳剂涂在玻璃板或醋酸酯薄膜上, 干燥而成的。

当将底片放入显影液中时, 受曝光的部分其卤化银被还原, 变成银粒而产生象。显影液对未经曝光的那部分卤化银没有作用。

全息图用底片的显影使用微粒显影液。微粒显影液有几种, 但是, 最好用底片制造厂指定的显影液。

将指定的药品调和在一起制成显影液时, 用规定量的约一半的水, 加温到约  $50^{\circ}\text{C}$ , 使溶解加速, 其余半分水, 可用冷水, 最后, 调整到约  $20^{\circ}\text{C}$ 。此外必须注意, 根据不同的药品, 混合的顺序也不同, 若将混合顺序搞错了, 会出现不溶解的状况。

显影时间随温度而变化, 显影液的温度每上升一度, 显影时间约缩短 30 秒。当显影时间增加时, 如图 11.21 所示, 底片的  $\gamma$  值增大。

为了防止显影不均匀, 必须搅拌显影液, 特别在最初几秒钟内, 必须充分进行搅拌。显影液随着时间的增加会被空气中的氧气氧化而使显影效果变差。所以, 每次使用时, 希望调配新的显影液。

### 11.5.2 停显液

显影液是碱性的, 当开始变成酸性时, 其显影作用很敏感地停止, 以冰醋酸为主要成分的停显液 (stop bath) 就是利用这个特性, 仅用水洗代替停显液也是可以的,

但是, 当使用停显液时, 显影作用在同一时刻一下子停止, 所以能够提高显影的均匀性。

停显液除上述作用外, 还可防止感光膜明胶的肿胀。此外, 定影液是酸性, 所以, 停显液还能延长定影液的寿命。

### 11.5.3 定影液

未曝光的部分, 显影后, 其卤化银原封不动地保存着, 定影液将卤化银变成水溶性的盐类, 不变成银粒子。

定影液主要成分是硫代硫酸钠  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  (sodium thiosulfate) 和硫代硫酸铵  $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_3$  (ammonium thiosulfate), 又称为海波 (hypo)。

当底片放到定影液中时, 未曝光部分变成透明的, 这是由于卤化银先变成透明的化合物

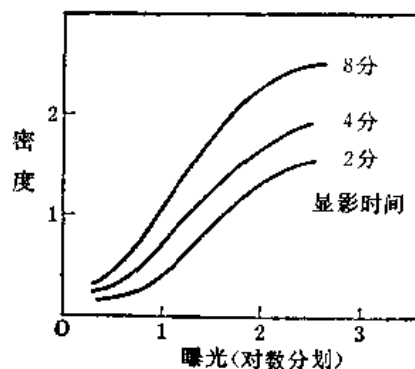


图11.21 显影时间对底片  $\gamma$  值的影响

之故。但是，这化合物若还未变成水溶性的盐类，则还不能认为定影已经结束。所以，定影时间大约需要二倍的变成透明的时间。

只要测定底片放入定影液后，直到透明所需要的时间，就知道定影液老化的程度，若达到透明所需的时间是新液时的二倍，则可以认为已达到失效点 (exhaustion point)，要换用新的定影液。

#### 11.5.4 水洗

把底片放入 18~20°C 的流水中约 30 分钟，使定影液洗掉，所谓流水，是在五分钟内，把所有的水都掉换一遍的流通的水，在水洗前，如果放在海波消除液 (hypo eliminator) 中约 2 分钟，可使水洗时间减少一半。

#### 11.5.5 干燥

用软的橡胶制的轧水机去掉底片表面的水滴后，用夹子夹住底片的一端，悬挂起来阴干。若用热空气吹干使干燥加快，会使明胶变形，是不好的，如果在干燥前，浸在驱水液 (photo flow) 中 30 秒钟或一分钟，则可迅速驱除水滴。

#### 11.5.6 漂白

如果在定影后，进行简单的水洗、再漂白、就能制成相位全息图 (phase hologram)，使浓度分布的干涉条纹变成折射率分布的干涉条纹。当变为相位全息图时，再现象的亮度就增加几倍，当把柯达铬增强漂白剂用作漂白剂时，根据说明书，浸入 A 液和 B 液中漂白后，进行五分钟水洗，再放入将 5 克氯化铜  $\text{CuCl}_2$  溶于 1 升水中而配成的溶液中，约五分钟后，切断水，进行干燥。

这就是全息图的制作方法。

## 文 献

- (1) J. Upatnieks and C. Leonard, "Diffraction efficiency of bleached photographically recorded interference patterns," *App. Opt.* Vol. 8, p. 85~89, 1969.
- (2) M. Lehmann, "Holography, Technique and Practice," The Focal Press, London, 1970.
- (3) T. H. Jeong, "Gaertner-Jeong holography manual," Gaertner Scientific Corporation, 1968.
- (4) 滝 保夫, 青木昌治, 樋渡清二編, "画像工学", コロナ社, 東京, 1972.
- (5) T.W. Cathey, "Optical Information Processing and Holography," John Wiley and Sons. N. Y. 1974.
- (6) 藤波重次, "写真技術", 共立全書 62, 共立出版, 1963.
- (7) 藤波重次, "高等写真技術", 共立全書 118, 共立出版, 1956.
- (8) G. T. Eaton, "Photographic Chemistry" Morgan and Morgan Inc. Hastings on Hudson, N. Y. 1957.
- (9) "Basic photographic sensitometry workbook," Kodak Publication No. Z-22-ED, 1968.

## 附录 维纳滤波器的传递函数

为了公式的简单起见, 仅计算  $x$  成分。希望使用滤波器将函数  $u(x)$  做成函数  $g(x)$ 。当办不到时, 做成  $g'(x)$ , 使  $g(x)$  与  $g'(x)$  之差的均方值成为最小, 也就是使下式之值成为最小

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x) - g'(x)|^2 dx = E[|g(x) - g'(x)|^2] \quad (\text{A.1})$$

求满足这个条件的滤波器的响应函数  $t(x)$ ,

$$\text{输入函数} = u(x) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{输出函数} = g'(x) = t(x) * u(x) \quad (\text{A.3})$$

式 (A.1) 中符号  $E$  意味着从  $-\infty$  到  $+\infty$  对  $x$  的积分。统计学上  $E$  称为预期值 (expectation value) 的运算符号。

把式 (A.3) 代入式 (A.1), 则

$$\begin{aligned} \varepsilon = E[|g(x)|^2] - 2\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t^*(\xi) u^*(x - \xi) d\xi \right] \\ \times g(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t(\xi) u(x - \xi) d\xi \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^*(\eta) u^*(x - \eta) d\eta \right\} dx \end{aligned}$$

改变积分顺序:

$$\begin{aligned} \varepsilon = E[|g(x)|^2] - 2\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} t^*(\xi) E[u^*(x - \xi) g(x)] d\xi \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(\xi) t^*(\eta) E[u(x - \xi) u^*(x - \eta)] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

这里, 先运算预期值:

$$E[u^*(x - \xi) g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x - \xi) g(x) dx = R_{ug}(\xi) \quad (\text{A.5})$$

$R_{ug}$  称为  $u(x)$  与  $g(x)$  的互相关函数 (crosscorrelation)。此外, 要注意式 (A.5) 的  $R_{ug}$  的下标的顺序与  $*$  的位置,

$$E[u(x - \xi) u^*(x - \eta)] = R_{uu}(\eta - \xi) \quad (\text{A.6})$$

$R_{uu}(\eta - \xi)$  称为  $u$  的自相关函数 (autocorrelation), 将式 (A.5), (A.6) 的定义代入式 (A.4), 则

$$\begin{aligned} \varepsilon = R_{gg}(0) - 2\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} t^*(\xi) R_{ug}(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(\xi) t^*(\eta) \\ \times R_{uu}(\eta - \xi) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式中

$$R_{gg}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) g(x + \xi) dx \quad (\text{A.8})$$

现在, 假设已找到了使  $\varepsilon$  之值成为最小的  $t(x)$  的函数  $t_0(x)$ , 设这时的  $\varepsilon$  值为  $\varepsilon_0$ , 采

用任意的函数  $g(x)$  与实数  $\sigma$  作如下定义:

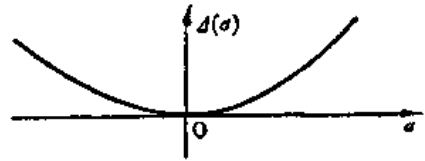
$$t(x) = t_0(x) + \sigma q(x) \tag{A.9}$$

求出把  $t(x)$  代入式(A.7) 时与把  $t_0(x)$  代入式(A.7) 时之差值为:

$$\Delta(\sigma) = \varepsilon - \varepsilon_0 \tag{A.10}$$

若  $t_0(x)$  实际上是提供  $\varepsilon$  的最小值的, 那么,  $\Delta(\sigma)$  之值就如图 A.1 所示, 而有:

$$\left. \frac{d\Delta(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = 0 \tag{A.11}$$



图A-1  $\Delta(\sigma)$  的图形

下面对式(A.11) 作计算:

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma) = \varepsilon - \varepsilon_0 &= 2 \sigma \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q^*(\xi) t_0(\eta) R_{uu}(\xi - \eta) d\xi d\eta \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} q^*(\xi) R_{vg}(\xi) d\xi \right\} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q^*(\eta) q(\xi) R_{uu}(\xi - \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \tag{A.12}$$

如果把(A.12) 代入式(A.11), 则

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} q^*(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t_0(\eta) R_{uu}(\xi - \eta) d\eta - R_{vg}(\xi) \right] d\xi = 0 \tag{A.13}$$

$g(x)$  无论选择怎样的函数, 为了满足式(A.13), 必须满足如下的积分方程式:

$$R_{vg}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} t_0(\eta) R_{uu}(\xi - \eta) d\eta \tag{A.14}$$

此式就称为维纳-霍夫方程式 (Wiener-Hopf equation), 此式用途很多, 通讯理论, 控制理论, 统计理论等等都要用到。利用此式的解而设计的滤波器就是维纳滤波器。

下面, 专门讨论式(A.14) 的解  $t_0(x)$  的求取。对(A.14) 的二边进行傅里叶变换:

$$\Phi_{vg}(f) = T_0(f) \Phi_{uu}(f) \tag{A.15}$$

式中

$$\Phi_{vg}(f) = \mathcal{F}\{R_{vg}(\xi)\} \tag{A.16}$$

$$\Phi_{uu}(f) = \mathcal{F}\{R_{uu}(\xi)\} \tag{A.17}$$

$$T_0(f) = \mathcal{F}\{t_0(\xi)\} \tag{A.18}$$

称式(A.16) 为输入-输出强度频谱密度 (input-output power spectral density)。而式(A.17) 为输入强度频谱密度 (input power spectral density)。

下面讨论利用式(A.15) 的结果设计维纳滤波器。使象  $g(x)$  通过  $h(x)$  系统而制成照片, 即

$$s(x) = h(x) * g(x) \tag{A.19}$$

当系统中有噪声, 因此在照片中就会出现:

$$u(x) = s(x) + n(x) \tag{A.20}$$

现在使用维纳滤波器使质量变差的照片接近原来的象  $g(x)$ 。所以, 维纳滤波器的输入是  $u(x)$  而输出为  $g(x)$ 。如果把式(A.19)、(A.20) 代入式(A.5),

$$\begin{aligned} R_{vg}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x - \xi) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(x - \xi) g(x) dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} n^*(x - \xi) g(x) dx \end{aligned} \tag{A.21}$$

设式 (A.21) 右边第二项完全是随机噪声, 那么其值将为零, 所以得到

$$R_{v_0}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x - \xi - p) h^*(p) dp$$

改变积分顺序, 并采用式 (A.8) 的定义, 得到

$$R_{v_0}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{gg}(\xi + p) h^*(p) dp \quad (\text{A.22})$$

若对式 (A.22) 用  $p = -t$  进行变数变换, 则相关函数式成为合成的形式, 对此式再进行傅里叶变换, 则

$$\mathcal{F}\{R_{v_0}(\xi)\} = H^*(f) \Phi_{gg}(f) \quad (\text{A.23})$$

$\mathcal{F}\{R_{gg}\} = \Phi_{gg}$  称为输出强度频谱密度 (output power spectral density)。为了求取  $\Phi_{v_0}(f)$  之值而计算  $R_{v_0}(\xi)$  之值时使用式 (A.20), 得

$$\begin{aligned} R_{v_0}(\xi) = & \int_{-\infty}^{\infty} s^*(x - \xi) s(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} n^*(x - \xi) n(x) dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \{s^*(x - \xi) n(x) + n^*(x - \xi) s(x)\} dx \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

若噪声完全是随机的情况, 式 (A.24) 的最后一项就变成零, 若着眼于式 (A.24) 的第一项可以写成  $R_{v_{01}}(\xi)$ ,

$$\begin{aligned} R_{v_{01}}(\xi) = & \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x - \xi - p) h^*(p) dp \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} g(x - r) h(r) dr \end{aligned}$$

改变积分的顺序, 设  $x - \xi - p = y$ , 则

$$\begin{aligned} R_{v_{01}}(\xi) = & \int_{-\infty}^{\infty} dp h^*(p) \int_{-\infty}^{\infty} dr h(r) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(y) g(y + \xi + p - r) dy \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dp h^*(p) \int_{-\infty}^{\infty} dr h(r) R_{gg}(\xi + p - r) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{R_{v_{01}}(\xi)\} = & \int_{-\infty}^{\infty} h^*(p) e^{i2\pi p f} dp \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-i2\pi r f} dr \cdot \Phi_{gg}(f) \\ = & H^*(f) H(f) \Phi_{gg}(f) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

下面, 着重讨论式 (A.24) 的第二项, 可以写成  $R_{v_{02}}(\xi)$ , 则

$$R_{v_{02}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} n^*(x - \xi) n(x) dx = R_{nn}(\xi) \quad (\text{A.26})$$

$$\mathcal{F}\{R_{nn}(\xi)\} = \Phi_{nn}(f) \quad (\text{A.27})$$

式 (A.27) 称为噪声强度频谱密度 (noise power spectral density)。最后, 从式 (A.25), (A.26), (A.27) 得到

$$\Phi_{v_0}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{gg}(f) + \Phi_{nn}(f) \quad (\text{A.28})$$

从式 (A.15), (A.23), (A.28) 得到最后结果:

$$T_o(f) = \frac{1}{H} \cdot \frac{\Phi_{gg}/\Phi_{nn}}{(I_{gg}/\Phi_{nn} + |H|^{-2})} \quad (\text{A.29})$$

# 习 题 解 答

## 第 一 章

1.1 (1)  $-i-j+2k$ , (2)  $k=i+j+k$ , 方向是  $k$  的方向, (3)  $|k|=k=\sqrt{3}$ , (4)  $\sqrt{3/2}$ ,  
(5)  $3 \times 10^9$  赫, (6) 0.1 米

1.2 (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} g' e^{-i2\pi f x} dx = [g e^{-i2\pi f x}]_{-\infty}^{\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} g e^{-i2\pi f x} dx = j2\pi f G$

(b)  $\mathcal{F}\{(f * g)'\} = j2\pi f F(f)G(f)$   
 $\mathcal{F}\{(f' * g)\} = [j2\pi f F(f)]G(f)$   
 $\mathcal{F}\{(f * g')\} = F(f)[j2\pi f G(f)]$

(c) 将加的顺序倒过来后, 设  $a = -1$  时使用式 (1.46)。

(d) 当加法时, 即使把  $n$  变成  $n-1$ , 并不影响结果。

(e)  $x$  值在整数  $n$  的附近, 有如下的关系,  $\sin \pi x \approx (-1)^{n+1} \pi (x-n)$  使用这个关系式和式 (1.46)。

(f) 以间隔为 2, 排列成的  $\delta$  函数阵列, 如图 B.1 所示, 可以分解为间隔为 1 的二个阵列。

(g) 计算式 (1.56) 的和:

$$\text{III}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{j2\pi N x} - e^{-j2\pi(2N+1)x}}{1 - e^{-j2\pi x}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}$$

若  $N$  为无限大, 则  $2N+1$  是通过奇数趋向无穷大。若  $N$  也包含偶数, 则可以写成:

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sin N\pi x / \sin \pi x$ 。当  $N$  为偶数时, 每一个  $\text{III}(x)$  的  $\delta$  函数值变成负值, 所以必须取绝对值。

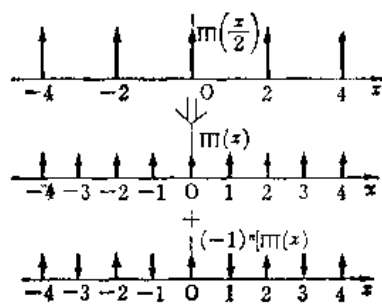


图 B.1

1.3 (a)  $f(x) = \frac{1}{2} [\text{III}(x) - \Lambda(2x)] * \text{III}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$T(f) = \left[ \text{sinc} f - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{2}\right) \right] \cdot \text{III}(2f)$$

(b)  $f(x) = \frac{1}{4a} \left[ 2\text{III}\left(\frac{x}{2a}\right) - \text{III}\left(\frac{x}{a}\right) \right] * \text{III}\left(\frac{x}{4a}\right)$

$$T(f) = a \text{sinc} a f (4 \cos \pi a f - 1) \cdot \text{III}(4a f)$$

1.4 注意值 1 的傅里叶变换是  $\delta$  函数。

1.5 除  $g_1(r)$  和  $g_2(r)$  以外, 所有的项全部是零, 另外还要使用公式  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ 。

$$G(\rho, \phi) = \frac{4\pi}{j} \cos \phi \int_0^1 r J_1(2\pi \rho r) dr = \frac{8}{j\rho} \cos \phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k)}{(3+2k)(1+2k)} J_{2+2k}(2\pi\rho)$$

1.6  $g_n = \frac{1}{2} (-j)^n \text{sinc} \frac{n}{2}$

$$G(\rho, \phi) = \frac{a}{2\rho} J_1(2\pi a \rho) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j(2m-1)(\phi+\pi)} \text{sinc} \left( \frac{2m-1}{2} \right) \int_0^a r J_{2m-1}(2\pi \rho r) dr$$

## 第二章

2.1 (a) 包含  $g$  时, 如图 2.2 所示, 有

$$u_{p1} = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_V g \frac{e^{ikh r}}{r} dv + \int_{S_2} \bar{w} \cdot \hat{n} ds \right] \quad (\text{B.2.1})$$

式中

$$\bar{w} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{ikh r}}{r} \nabla u - u \nabla \left( \frac{e^{ikh r}}{r} \right) \right\} \quad (\text{B.2.2})$$

(b) 不包含  $g$  时, 如图 2.3 所示, 有

$$u_{p2} = \int_{S_2 + S_3} \bar{w} \cdot \hat{n} ds + \int_{S_4 + S_5} \bar{w} \cdot (\hat{n}_4 + \hat{n}_5) ds$$

从  $\hat{n}_4 = -\hat{n}_5$ , 则

$$u_{p2} = \int_{S_2 + S_3} \bar{w} \cdot \hat{n} ds \quad (\text{B.2.3})$$

(c) 仅包含  $g$  的情况下, 若式(2.10)适用, 则

$$\frac{1}{4\pi} \int_V g \frac{e^{ikh r}}{r} dr + \int_{S_3} \bar{w} \cdot \hat{n}_3 ds = 0$$

$\hat{n}_3 = -\hat{n}_2$ , 则有

$$\frac{1}{4\pi} \int_V g \frac{e^{ikh r}}{r} dv = \int_{S_3} \bar{w} \cdot \hat{n}_3 ds \quad (\text{B.2.4})$$

将此关系式代入式(A.2.3), 则

$$u_{p1} = u_{p2}$$

2.2 利用式(B.2.2)的符号, 得

$$u = u_1 + u_2 = \int_{S_A} \bar{w} \cdot \hat{n} ds + \int_{u-S_A} \bar{w} \cdot \hat{n} ds = \int_u \bar{w} \cdot \hat{n} ds$$

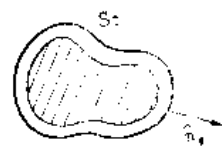


图 B.2

2.3  $x_0$  方向是有限的, 所以能满足  $x_0^2/z \ll 1$  而使用夫琅和费近似式。但是,  $y_0$  方向扩展到无限大, 所以, 只能使用菲涅耳近似式, 将式(2.30)与(2.33)组合起来, 得

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) &= \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk \left( z_i + \frac{x_i^2}{2z_i} \right)} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0) e^{-jk \frac{x_i x_0}{z_i}} e^{jk \frac{1}{2z_i} (y_0 - y_i)^2} dx_0 dy_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{j\lambda z_i}} \cdot e^{jk \left( z_i + \frac{x_i^2}{2z_i} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) e^{-j2\pi \frac{x_i x_0}{\lambda z_i}} dx_0 \end{aligned}$$

式中使

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$2.4 \quad \tan \theta = \frac{\frac{dS}{d\alpha} \Delta\alpha}{\frac{dC}{d\alpha} \Delta\alpha} \quad (\text{B.2.5})$$

由式(2.65)得

$$\frac{dC}{d\alpha} + j \frac{dS}{d\alpha} = e^{j \frac{\pi}{2} \alpha^2} = \cos \frac{\pi}{2} \alpha^2 + j \sin \frac{\pi}{2} \alpha^2 \quad (\text{B.2.6})$$

将式(B.2.6)代入式(B.2.5)则

$$\theta = \frac{\pi}{2} \alpha^2 \quad (\text{B.2.7})$$

$C(\alpha)$ 在  $\alpha = \sqrt{4n+1}$  时为极大,  $\alpha = \sqrt{4n-1}$  时为极小。

$S(\alpha)$ 在  $\alpha = \sqrt{4n+2}$  时为极大,  $\alpha = \sqrt{4n}$  时为极小。

2.5 作  $x = -t$  的变数变换, 则

$$F(-\alpha) = \int_0^{-\alpha} e^{j \frac{\pi}{2} x^2} dx = - \int_0^{\alpha} e^{j \frac{\pi}{2} t^2} dt = -F(\alpha)$$

### 第三章

3.1  $h \approx 0.4$  微米。

3.2 偏转器的透过率分布  $g(x)$  可利用式(1.89)改变成如下形式:

$$g(x) = e^{i\phi(x)} = e^{i\phi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\psi_m) e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} nx}$$

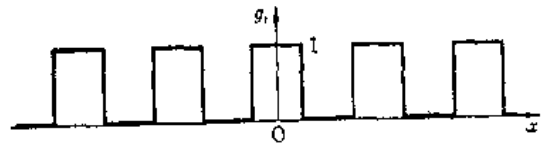
表示入射光的公式为:

$$e^{-i2\pi \frac{\sin\theta_0}{\lambda} x}$$

所以利用式(2.61)可得

$$u(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z_i}} \cdot e^{j \left( k z_i + k \frac{x_i^2}{2z_i} - \frac{\pi}{4} \right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\psi_m) \delta \left( f - \frac{n}{\lambda_0} + \frac{\sin\theta_0}{\lambda} \right) \Big|_{f = -\frac{\sin\theta}{\lambda}}$$

3.3 在图 3.24 中, 认为等声压面仅一块时, 散射光分布是不一样的。以入射角  $\theta$  入射的反射光, 反射角等于入射角的方向为最大。折射率周期变化形成的衍射光峰值方向和反射角方向一致时, 偏转光线将特别大, 这时和在题 3.1 的锯齿形衍射光栅中所述情况相同。应该注意式(3.51)仅表示位相变化, 不包含散射光的非各向同性。



图B.3  $g_t$ 的透过率分布

3.4 用  $g_0$  表示普通带板的透过率分布, 如图 B.3 所示的透过率分布表示成

$$g_t(x) = \Pi(x/b) \Pi(x/2b) \quad (\text{B.3.1})$$

由于 MZP 的透过率分布  $g$  值是 0 或 1。所以,  $g_x^2 = g_x$ ,  $g_x^3 = g_x$ ,

$$g = |g_x - g_t| = (g_x - g_t)^2 = g_x - 2g_x g_t + g_t \quad (\text{B.3.2})$$

用式(2.36), 则衍射光分布  $u(x_i, y_i)$ , 是

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \cdot e^{jk \left( z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i} \right)} \mathcal{F} \left\{ (g_x - 2g_x g_t + g_t) e^{jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i}} \right\} = u_x - u_{xt} + u_t \quad (\text{B.3.3})$$

式(B.3.3)中  $u_x$  在本书的式(3.47)已经求过, 利用式(3.50)则



$$u_{zt} = \frac{1}{j\lambda p_n} \cdot e^{jk \left( p_n + \frac{x_i^2 + z_i^2}{2p_n} \right)} 2a^2 \frac{\sin \frac{n}{2} \pi}{n\pi} \left[ \text{sinc}(af) \text{III}(2af) \right] f_x = \frac{x_i}{\lambda z_i}, f_y = \frac{y_i}{\lambda z_i} \quad (\text{B.3.4})$$

最后, 由式(1.56), (2.60), (2.65), (B.3.1)得到  $u_i$  为

$$u_i = \frac{e^{jk p_n}}{2j} \delta \left( \frac{y_i}{\lambda p_n} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ F \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda p_n}} \left( b - \frac{x_i}{\lambda p_n} - \frac{m}{2b} \lambda p_n \right) \right) - F \left( -\sqrt{\frac{2}{\lambda p_n}} \left( b + \frac{x_i}{\lambda p_n} + \frac{m}{2b} \lambda p_n \right) \right) \right\} \quad (\text{B.3.5})$$

$$\text{3.5 } u(x_i) = \frac{1}{\sqrt{j\lambda z_i}} \cdot e^{jk \left( z_i + \frac{x_i}{2z_i} - \frac{\pi}{4} \right)} \mathcal{F} \left\{ e^{j \frac{k}{2} \frac{x^2}{z_i}} + \frac{1}{2} e^{j \frac{k}{2} \left( \frac{1}{z_i} - \frac{1}{p} \right) x^2} + \frac{1}{2} e^{j \frac{k}{2} \left( \frac{1}{z_i} + \frac{1}{p} \right) x^2} \right\} f = \frac{x_i}{\lambda z_i}$$

当  $z_i = p$  时

$$u(x_i) = e^{jk x_i} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \delta \left( \frac{x_i}{\lambda p} \right) + e^{-jk \frac{x_i}{\lambda p}} \right) \right]$$

当  $z_i = -p$  时

$$u(x_i) = e^{-jk x_i} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \delta \left( \frac{x_i}{\lambda p} \right) + e^{jk \frac{x_i}{\lambda p}} \right) \right]$$

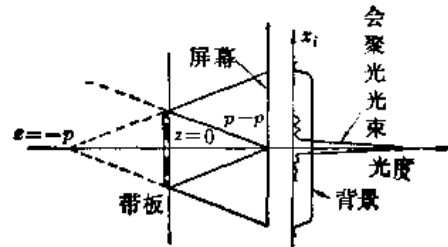


图 B.4

### 第四章

$$\text{4.1 } x_{1max} - x_{2max} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$L_1 - L_2 = \frac{n_0 \pi}{4a} [\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2]$$

$$\text{4.2 } A = \frac{1}{\sqrt{n^2(z) - (a^2 + b^2)}}$$

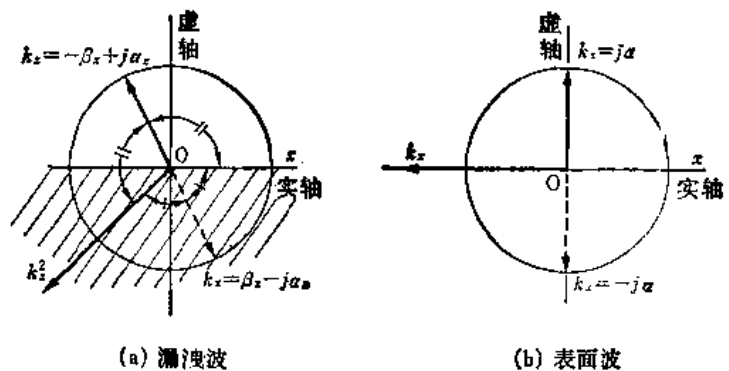
$$\text{4.3 } x^2 + (a \pm z)^2 = (a \pm z_0)^2$$

$$\text{4.4 } k_x^2 = k^2 - \beta_x^2 + \alpha_x^2 - j2\alpha_x \beta_x \quad (\text{B.4.1})$$

由于  $\alpha_x > 0$ ,  $\beta_x > 0$ , 所以如图 B.5(a) 所示,  $k_x^2$  必定在复平面的下半面

$$k_x = \pm (\beta_x - j\alpha_x) \quad (\text{B.4.2})$$

当为正号时, 随着  $x$  的增加而成为无限大, 所以物理上是不可能的, 即



(a) 漏泄波

(b) 表面波

图B.5 漏泄波与表面波的复数平面表示

$$E = E_0 e^{j(-\beta_x x + \beta_x z) - (\alpha_x x + \alpha_x z)}$$

等位相面与等振幅面分别和  $z$  轴的夹角为

$$\tan \theta = \frac{\beta_x}{\beta_z}, \quad \tan \theta' = -\frac{\alpha_x}{\alpha_z} \tag{B.4.3}$$

将(B.4.2)代入(B.4.1)则

$$\alpha_x \beta_x = \alpha_z \beta_z \tag{B.4.4}$$

由式(B.4.3)和(B.4.4), 可以看出两面成直角,  $\alpha \rightarrow 0$  时  $k_x$  的图形成为如图 B.5(b) 所示的形式和表面波情况一致。

$$4.5 \quad n_0 \sin \phi = n_1 \cos \theta \quad n_1 \sin \theta = n_2 \quad \phi_c = 32'36''$$

### 第五章

$$5.1 \quad \overline{V_1 V_2} \text{ 的光程} = nk(f - a)$$

$$\overline{S_1 S_2 S_3} \text{ 的光程} = nk(r - a) + k(f - r \cos \theta)$$

当二光程相等时, 表示椭圆面

$$5.2 \quad P = \text{circ}\left(\frac{r}{D/2}\right)$$

$$\overline{P}\left(\frac{l}{\lambda d_2}\right) = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{J_1\left(\pi D \frac{l}{\lambda d_2}\right)}{\frac{l}{\lambda d_2} \cdot \frac{D}{2}} \tag{B.5.1}$$

如图 1.7 表明的那样,  $J_1(2\pi\rho)$  的第一零值在  $\rho = 0.61$  时, 所以

$$\pi D \frac{l}{\lambda d_2} = 0.61 \times 2\pi$$

$\overline{P}(l/\lambda d_2)$  的主瓣的宽度即象面能分辨的宽度为,

$$2l = 2.44 \frac{\lambda d_2}{D} \tag{B.5.2}$$

因此, 物面上能分辨的宽度为

$$2l_0 = 2l \times \frac{d_1}{d_2} = 2.44 \frac{\lambda d_1}{D} \approx \frac{1}{f_s} \tag{B.5.3}$$

再根据透镜的成象公式和式(B.5.3)得

$$\frac{1}{m} = \frac{d_1}{f} - 1 = \frac{1}{2.44\lambda F f_s} - 1 \tag{B.5.4}$$

$$m = 1.63 \times 10^{-3}$$

$$5.3 \quad (f - d_1)$$

$$5.4 \quad u(x_i, y_i) = -e^{jk\left(4a + \frac{x_i^2 + y_i^2}{4a}\right)} \left[ T_1(2a\lambda f_x, 2a\lambda f_y) * T_2(f_x, f_y) \right]_{f_x = \frac{x_i}{2a\lambda}, f_y = \frac{y_i}{2a\lambda}}$$

5.5 将很多行形式的输入同时在  $x$  方向进行傅里叶变换

5.6

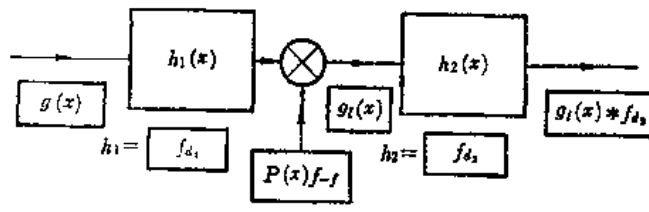


图 11.6

## 第六章

$$\begin{aligned}
 6.1 \quad G_1 &= (g_0 - g_4) + (g_2 - g_6)W^2 + (g_3 - g_5)W + (g_3 - g_7)W^3 \\
 G_3 &= (g_0 - g_4) + (g_2 - g_6)W^2 - [(g_1 - g_5)W + (g_3 - g_7)W^3] \\
 G_2 &= (g_0 + g_4) - (g_2 + g_6) + [(g_1 + g_5) - (g_3 + g_7)]W^2 \\
 G_0 &= (g_0 + g_4) - (g_2 + g_6) - [(g_1 + g_5) - (g_3 + g_7)]W^2
 \end{aligned}$$

$$6.2 \quad G_l = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-j \frac{2\pi}{N} l k}$$

$$\text{而} \quad G_{N-l} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-l)k} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{j \frac{2\pi}{N} l k} = G_{-l}$$

$$6.3 \quad G_0 = 4, \quad G_1 = G_2 = G_3 = 0$$

而且

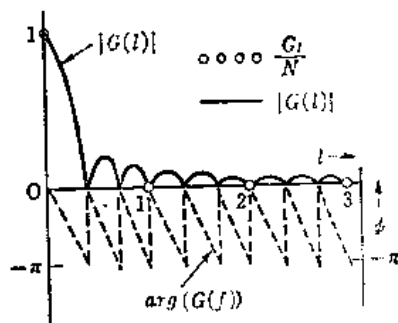
$$\mathcal{F}\{g(x)\} = \mathcal{F}\left\{\Pi\left(\frac{x-1.5}{3}\right)\right\} = 3e^{-j\pi x} \text{sinc} 3l$$

$l$  在整数的点上

$$\frac{G_l}{N} = |G(l)|$$

$G_l$  只能在  $l$  是整数时才有定义而  $G(l)$  即使在中间点上也能定义。

$$\begin{aligned}
 6.4 \quad G_0 &= 3, \quad G_1 = -2 - j, \quad G_2 = 1, \quad G_3 \\
 &= -2 + j \\
 G'_0 &= 3, \quad G'_1 = -1 + j2, \quad G'_2 = -1, \quad G'_3 \\
 &= -1 - j2
 \end{aligned}$$



图B.7  $G_l$ 与 $G(l)$ 的比较

$$G'_l = \sum_{k=0}^{N-1} g'_k e^{-j \frac{2\pi}{N} k l} = \sum_{k=0}^{N-1} g_{k-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k l}$$

二边乘以  $e^{j \frac{2\pi}{N} i}$ , 并设  $k' = k - 1$ , 则

$$G'_l e^{j \frac{2\pi}{N} i} = \sum_{k=0}^{N-1} g_{k-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} (k-1) l} = \sum_{k'=-1}^{N-2} g'_k e^{-j \frac{2\pi}{N} k' l} = G_l$$

式中  $g'_0 = g_3 = g_{-1}$

$$\text{所以} \quad G'_l = G_l e^{-j \frac{2\pi}{N} l}$$

$e^{-j \frac{2\pi}{N} l}$  的值, 当  $l = 0, 1, 2, 3$  时, 分别为  $1, -j, -1, j$ , 上面的  $G$  和  $G'$  的关系就成这个形式。

6.5 图 6.9 上最初的差全部是零, 所以  $G_1 = G_2 = G_3 = G_7 = 0$ 。

### 第七章

7.1 利用 5.5.2 节的近似而得到

$$t(x) = e^{-jk\frac{x^2}{2z_0}} \mathcal{F} \left\{ o(x) e^{-jk\frac{x^2}{2z_0}} \right\} \Pi\left(\frac{x}{a}\right) = e^{-jk\frac{x^2}{2z_0}} o_{-z_0}\left(-\frac{x}{\lambda z_0}\right) \Pi\left(\frac{x}{a}\right)$$

式中

$$o_{-z_0}(f_x) = f_1\{o_{-z_0}(x)\}$$

$$o_{-z_0}(x) = o(x) e^{-jk\frac{x^2}{2z_0}}$$

式中省略了系数。

$-z_0$  的负号是全息图的位置取在原点，以下重复同样的步骤，则

$$E = o(x) * \sin c\left(a \frac{x_f}{\lambda z_f}\right)$$

7.2 如图中(a)的情况与(b)情况其计算是相同的，这一点应注意。计算结果(一次近似)说明与入射光相对的再现象其位置是不随全息图的转动而变动的。

7.3 在  $z_f = -z$  面内，只有位于从原来的象向  $x$  轴方向移动了  $-z_0 \sin \theta$  的点上能形成共轭象。

7.4 (a) 用  $t(x-a)$  计算，象仅向右偏离  $a$ 。

(b) 仅改变  $y$  成分的符号

(c)  $x \rightarrow -y', y \rightarrow -x'$

(d)  $x \rightarrow -x', y \rightarrow -y'$

将计算结果归纳而示于图(B.9)上。

7.5 以  $x_f = f_2 \frac{\sin \theta}{\lambda}$ ,  $y_f = 0$  为中心，形成尺寸为  $Ml_1 \times Ml_2$  的再现象

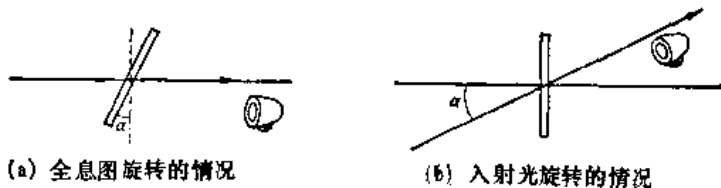


图 B.8

(a) 全息图旋转的情况 (b) 入射光旋转的情况

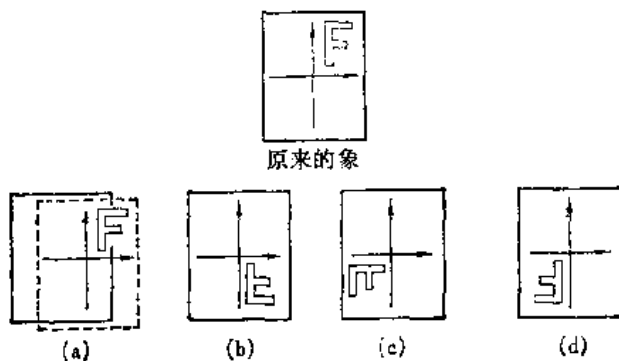


图 B.9

### 第八章

8.1 用式(8.30)计算下式时

$$g(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(x, y) A^*(x - f_x, y - f_y) dx dy$$

只要证明  $g(f_x, f_y) = g(-f_x, -f_y)$  就可以了。

8.2 只要证明  $h(x, y) = h(-x, -y)$  时,  $\mathcal{L}(f_x, f_y) = \mathcal{L}^*(f_x, f_y)$  就可以了。

8.3

$$I(x) = I_0(x) * |h(x)|^2 = I_0 \int_{-\infty}^x |h(\xi)|^2 d\xi$$

$$\therefore |h(x)|^2 = \frac{1}{I_0} \frac{dI(x)}{dx}$$

8.4 其中

$$f_0 = \frac{1}{2\lambda d_2} = \frac{1}{2 \times 5 \times 10^{-6} \times 10} = 1000 \text{ 条/厘米}$$

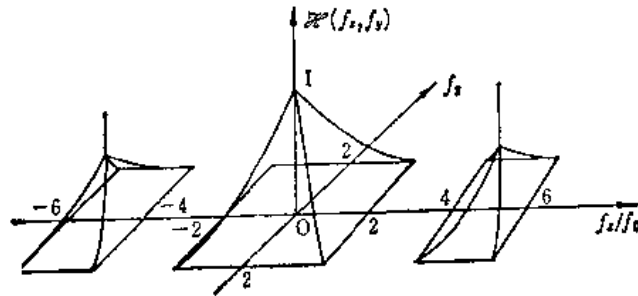


图 B.10

8.5

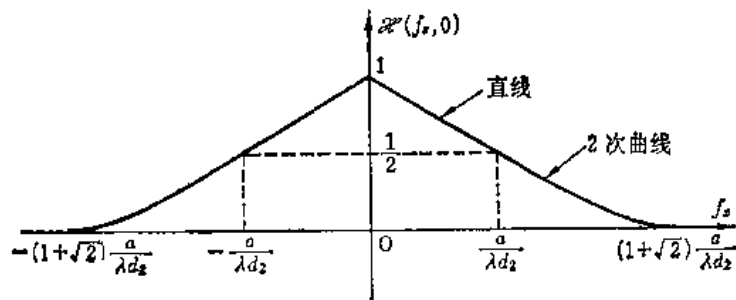


图 B.11

8.6 (a)  $S(d) = \triangle ABO - \triangle AMO$

$$(b) \mathcal{Z}(\rho) \begin{cases} = \frac{2}{\pi} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{\rho}{2\rho_0} \right) - \frac{\rho}{2\rho_0} \sqrt{1 - \left( \frac{\rho}{2\rho_0} \right)^2} \right] & \rho < \rho_0 = \frac{a}{\lambda d_2} \\ = 0 & \rho > \rho_0 = \frac{a}{\lambda d_2} \end{cases}$$

### 第九章

9.1  $b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$

9.2  $b_0 = 1, b_1 = -2, b_2 = 1, b_3 = 0,$

9.3 (a) 如果不是随机的, 即使错开  $2\sigma$  以上, 仍呈现出重合的圆, 在  $\rho_0 = \frac{2\sigma}{\lambda d_2}$  上不能遮断。

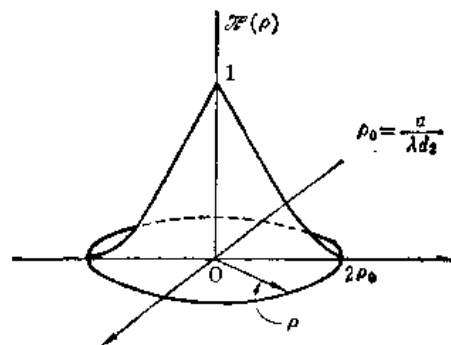


图 B.12

(b) 每错开  $d = b$ , 可以重复相同的计算, OTF 成为周期函数, 其周期为  $b/\lambda d_2$ 。

9.4 对周期函数滤波器, 如图 9.16, 除非能满足  $2/f_s \ll 1/a$ , 否则彼此相邻的频谱不重合使复元象失真。由这种相邻重合性引起的失真称为假失真(aliasing)。

用对数滤波器时,  $a$  越大, 掩模 M 的不透明部分应该做的间隔越缩小, 不透明部分增加, 随着不透明部分的增加, 象质变差, 其特点是丧失的空间频率成分是周期性的。

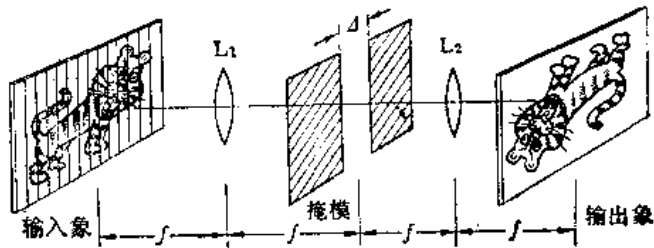


图 B.13

9.5 (a) 对于周期函数滤波器的使用方法,

$$\Delta = \frac{\lambda f}{2b} = \frac{0.6 \times 10^{-3} \times 1000}{2 \times 0.5} = 0.6 \text{ 毫米}$$

还能看出, 必要条件  $f_s < \frac{1}{2b}$  也能满足, 即  $0.8 < \frac{1}{2 \times 0.5} = 1.0$ 。

(b) 使用对数滤波器的方法  
掩模面上栅格的频谱是

$$\mathcal{F} \left\{ \log \left[ \left[ \Pi \left( \frac{x}{b} \right) * \Pi \left( \frac{x}{a} \right) \right] \Pi \left( \frac{x}{c} \right) \right] \right\}$$

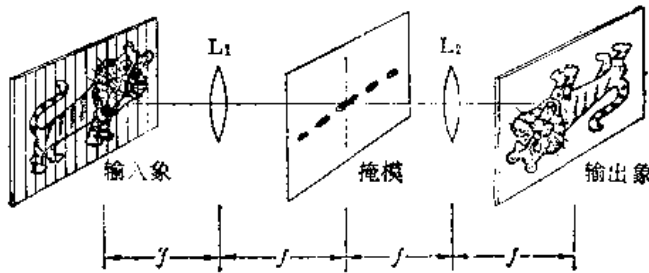


图 B.14

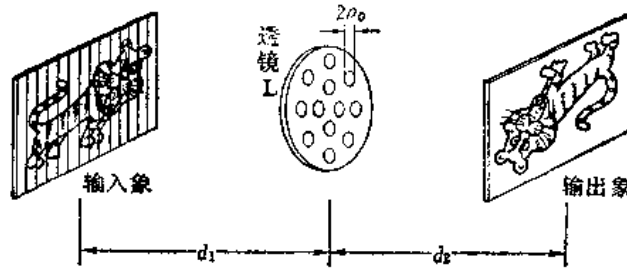


图 B.15

但是不表示成解析函数, 所以必须用实验方法求掩模的透过率分布。

(c) 使用多光瞳低通滤波器的方法时

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

$\rho_0 = 0.48$  毫米, 式中假定  $d_1 = d_2 = 2f$